6. série

Téma: Ideály

Termín odeslání: 18. DUBNA 1995

Úvod: Označme $\mathbb{Z}$ množinu celých čísel. Nechť $n \in \mathbb{Z}$ je dáno. Množinu

$$n\mathbb{Z} := \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$$

nazveme *ideál* množiny $\mathbb{Z}$ generovaný číslem n (povšimněte si, že samotná množina $\mathbb{Z}$ je také ideálem, je generovaná číslem 1, resp. -1; zřejmě $\{0\} = 0\mathbb{Z}$). Dále definujme operace sčítaní a násobení podmnožin množiny $\mathbb{Z}$ takto: nechť $A \subset \mathbb{Z}$, $B \subset \mathbb{Z}$. Potom

$$A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}, \qquad A \cdot B := \{ab : a \in A,\ b \in B\}.$$

1. ÚLOHA

Dokažte, že neprázdná množina $A \subset \mathbb{Z}$ je ideálem právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky

(i) $a, b \in A \Rightarrow a + b \in A$
(ii) $a \in A, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ca \in \mathbb{Z}A$

2. ÚLOHA

nsd $x \cdot y$ nsn(x,y)

Nechť $A \subset \mathbb{Z}$, $B \subset \mathbb{Z}$ jsou ideály. Potom $A + B$, $A \cdot B$ a $A \cap B$ jsou ideály. Dokažte a zjistěte, kterými celými čísly jsou tyto ideály generovány.

3. ÚLOHA

Definujme nyní podíl ideálu $A \subset \mathbb{Z}$ a celého čísla k:

$$A_n : k = \{l \in \mathbb{Z} : lk \in A\}.$$

$m \in \mathbb{Z}$
$l = m \cdot \frac{n}{nsd(n,k)} = m \cdot \frac{nsn(n,k)}{k}$

a radikál ideálu

$$\sqrt{A_n} := \{l \in \mathbb{Z} : \text{ existuje } k \in \mathbb{N} \text{ tak, že } l^k \in A\}.$$

$m = \sqrt[y]{n}$ $y > 0$ nejv. možné

Dokažte, že právě definované množiny jsou ideály. Zjistěte, čím jsou generovány.

4. ÚLOHA

Ideál A_n se nazývá maximální, jestliže platí: je-li B_m ideál takový, že $A \subseteq B$, pak buď $B = A$ nebo $B = \mathbb{Z}$. Naleznete všechny maximální ideály.

m musí být dělitelem n. Jestliže m = pouze 1 a n => n = prvočísla + 1

5. ÚLOHA

Nechť A je ideál. Dokažte, že následující čtyři podmínky jsou ekvivalentní.

(i) A je maximální ideál.
(ii) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : ab \in A \implies a \in A$ nebo $b \in A$. rozloží na prvočísla
(iii) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : ((\{a\} + A) \cdot (\{b\} + A) = A) \implies (\{a\} + A = A$ nebo $\{b\} + A = A)$.
(iv) $\forall a \in \mathbb{Z} \setminus A : \exists b \in \mathbb{Z} \setminus A : ((\{a\} + A) \cdot (\{b\} + A)) = \{1\} + A$.