

## 5. série

**Téma:** Součty čtverců

**Termín odeslání:** 13. BŘEZNA 1995

Než přistoupíme k zadání jednotlivých úloh, zavedme nejprve nezbytná označení. Označme  $\text{nsd}(a, b)$  resp.  $\text{nsn}(a, b)$  největší společný dělitel resp. nejmenší společný násobek čísel  $a, b$ . Vzhledem k nejasnostem při používání pojmu *přirozená čísla* označme  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  a  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ . V této sérii budete zkoumat vlastnosti následující množiny:

$$\mathbb{M} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists a, b \in \mathbb{N}_0, n = a^2 + b^2\}.$$

Jest  $0 = 0^2 + 0^2$ ,  $1 = 0^2 + 1^2$ ,  $2 = 1^2 + 1^2$ ,  $4 = 0^2 + 2^2$ ,  $5 = 1^2 + 2^2$ ,  $8 = 2^2 + 2^2$ ,  $9 = 0^2 + 3^2$ ,  $10 = 1^2 + 3^2$  atd., tedy  $\mathbb{M} = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, \dots\}$ . Vypište si pár dalších prvků množiny  $\mathbb{M}$  a rozmyslete si, že čísla 3, 6 a 7 opravdu do množiny  $\mathbb{M}$  nepatří. Nyní můžeme přistoupit k formulaci soutěžních úloh:

### 1. ÚLOHA

Nechť  $m \in \mathbb{M}$ ,  $n \in \mathbb{M}$ . Potom  $m \cdot n \in \mathbb{M}$

### 2. ÚLOHA

Nechť  $m \in \mathbb{M}$ ,  $n \in \mathbb{M}$  a necht'  $\frac{m}{n} \in \mathbb{N}_0$ . Potom  $\frac{m}{n} \in \mathbb{M}$

### 3. ÚLOHA

Nechť  $m \in \mathbb{M}$ ,  $n \in \mathbb{M}$ . Potom  $\text{nsd}(m, n) \in \mathbb{M}$  a  $\text{nsn}(m, n) \in \mathbb{M}$

### 4. ÚLOHA

Vyjádření prvků množiny  $\mathbb{M}$  jako součtu dvou čtverců zřejmě není jednoznačné:  $25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$ . Dokažte následující tvrzení:

- (1) Ke každému  $k \in \mathbb{N}$  existuje  $m \in \mathbb{M}$  tak, že  $m$  lze vyjádřit jako součet dvou čtverců čísel z  $\mathbb{N}_0$  alespoň  $k$  různými způsoby.
- (2) Existuje nekonečně mnoho prvků v  $\mathbb{M}$ , pro něž je toto vyjádření (až na pořadí sčítanců) jednoznačné.
- (3) Existuje nekonečně mnoho čísel z  $\mathbb{N}$ , která neleží v  $\mathbb{M}$ .

### 5. ÚLOHA

Jsou dána dvě čísla  $a, b \in \mathbb{N}$ . Žák A zná jejich součet, žák B zná součet jejich čtverců. Proběhl tento rozhovor:

B: Nevím, jaká jsou to čísla.

A: Nevím, jaká jsou to čísla.

B: Nevím, jaká jsou to čísla.

A: Nevím, jaká jsou to čísla.

B: Nevím, jaká jsou to čísla.

A: Nevím, jaká jsou to čísla.

B: Nyní již vím, jaká jsou to čísla.

Víte to i vy?