4. série

Téma: Funkcionální rovnice

Termín odeslání: 27. ÚNORA 1995

1. ÚLOHA

Zjistěte jaký je součet všech koeficientů polynomu:

$$(x^5 - 5x^3 + 3x^2 + 2)^{1995}(x^4 - 3x^2 + x + 2)^{1994}$$

2. ÚLOHA

Zjistěte zda existuje takový polynom $P(x)$ s nezápornými koeficienty, že $\forall x \in \mathbb{R}$ je $P(x^3+x) = ((x-3)^{1995}+1)((x+3)^{1994}+1)$.

3. ÚLOHA

Ukažte, že polynom $4(n^3-n)x^{2n+1} - 3(n^2-n)x^n + 2x^2 - 1$ nemá pro žádné $n \geq 2$ celočíselný kořen.

4. ÚLOHA

Mějme funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y, z > 0$ platí

(1) $f(x+y-z) < f(x+y+z)$
(2) $g(x) - f(y) < g(x+y) - f(4y)$.

Dokažte, že pak existuje maximálně jedno reálné řešení rovnice $f(g(g(f(x)))) = 0$.

5. ÚLOHA

Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$(1 - \cos(x+y))(f(x-y+z) + f(-x+y+z) - f(z + z\cos(x+y)) +$$
$$+ 2f(z)\cos(x+y) - \cos^2(x+y)f(z) = f(z-y) - f(-y)$$