$b \in A$, je $B \subseteq A$ a tedy $A = B$. Pokud $c \in A$, je $a \mid c$, $c \mid a$, tj. $c = a$ (obě čísla jsou kladná) a $b = 1$ tj. $B = \mathbb{Z}$.
(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Všimněme si, že je-li A ideál, je pro $x - y \in A$ dokonce $\{x\} + A = \{y\}A$ a pro $x - y \notin A$ je $(\{y\} + A) \cap (\{x\} + A) = \emptyset$. Je-li nyní $ab \in A$, snadno odhalíme, že $(\{a\} + A) \cdot (\{b\} + A) = \{ab + ap + bq + pq : p, q \in A\} \subseteq A$, a použitím (iii) a toho, co bylo řečeno výše, z toho vyplývá $a \in A$ nebo $b \in A$.
(iv) $\Longrightarrow$ (iii) Předpokládejme $(\{a\} + A) \cdot (\{b\} + A) \subseteq A$; stejnou úvahou jako v minulé implikaci z toho odvodíme $ab \in A$. Nechť dále $\{a\} + A \nsubseteq A$ (tj. $a \notin A$); chceme ukázat, že pak už nutně $b \in A$. Z podmínky (iv) najděme k číslu a takové $c \in \mathbb{Z} \setminus a$ tak, aby $ca \in A + 1$ (a tedy $ca - 1 \in A$. Pak ale také $cab - b = (ca - 1)b \in A$ a protože $ab \in a$ (a tedy $cab \in A$), musí být také $b = cab - b \in A$.
(i) $\Longrightarrow$ (iv) Nechť p je generátor A. Pokud $p = 1$, není co řešit (pak zatěžko vybrat nějaké ... Buď tedy p prvočíslo, $A = p\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z} \setminus A$. uvažujme množiny $\{ja\} + A$, kde j probíhá $0, 1, \ldots, p-1$. Kdyby např. $\{ia\} + A$ a $\{j\} + A$ měly neprázdný průnik, musely by už (stejnou úvahou jako výše) být nutně stejné a $j - i \in A$, což pro $i \neq j$ z $\{0, \ldots, p-1\}$ nejde. Jsou tedy po dvou disjunktní. Snadno nahlédneme, že každá z uvažovaných množin musí obsahovat některé z čísel $0, \ldots, p-1$ a vzhledem k disjunktnosti každá jiné. Protože máme p množin, musí některá $\{ia\} + A$ obsahovat jedničku. Pak ale $\{ia\} + A = \{1\} + A$, tedy $ia \in \{1\} + A$ a zjevně $i \notin A$. Zbývá si uvědomit, že z $ia \in \{1\} + A$ už plyne $(\{i\} + A) \cdot (\{a\} + A) \subseteq A$.

Komentáře k 7. sérii

1. úloha Řekneme, že konečná množina M bodů roviny je rozptýlená, jestliže platí: jsou-li x, y dva různé body z M, pak mají vzdálenost aspoň 1.
(a) Nalezněte co největší $c > 0$, ke kterému existuje $d > 0$ tak, že pro každé $r > 0$ existuje rozptýlená množina ležící v kruhu o poloměru r, která má aspoň $c(r - d)^2$ prvků.
(b) Nalezněte co nejmenší konstantu $C > 0$, ke které existuje $D > 0$ tak, že platí: kdykoli je M rozptýlená množina ležící v kruhu o poloměru r, potom má M nejvýše $C(r + d)^2$ prvků.
Poznámka: Nemusíte nalézt nejlepší možné hodnoty c a C. Podstatný je důkaz, že hodnoty c, C opravdu splňují podmínky zadání. Na druhou stranu, čím lepší konstanty, tím více bodů.

(a) Bez újmy obecnosti můžeme konstruovat M v kruhu K se středem v počátku a poloměrem R. Označme $A(u, v)$ bod o souřadnicích $(u + \frac{1}{2}v, \frac{\sqrt{3}}{2}v)$. Snadno spočítáme, že čtverec vzdálenosti $A(u_1, v_1)$ a $A(u_2, v_2)$ je

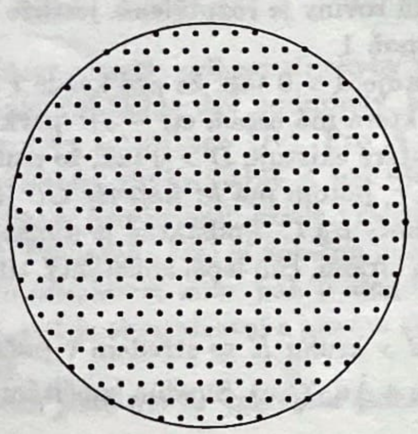
$$\begin{aligned}(u_2 - u_1)^2 + (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) + (v_2 - v_1)^2 &= \left((u_2 - u_1) + \tfrac{1}{2}(v_2 - v_1)\right)^2 + \tfrac{3}{4}(v_2 - v_1)^2 \\ &= \left((v_2 - v_1) + \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)\right)^2 + \tfrac{3}{4}(u_2 - u_1)^2.\end{aligned}$$

Předpokládejme, že u_i, v_i jsou celá. Z druhého a třetího tvaru vidíme, že pokud je $u_1 \neq u_2$ nebo $v_1 \neq v_2$, je čtverec vzdálenosti aspoň $\frac{3}{4}$. Z prvního tvaru ale vidíme, že je to celé číslo, takže je to aspoň jedna. Množina M těch $A(u, v)$, které leží v kruhu, je tedy rozptýlená. Nyní odhadneme zdola počet jejích prvků. Buď K' kruh se středem v počátku a poloměrem

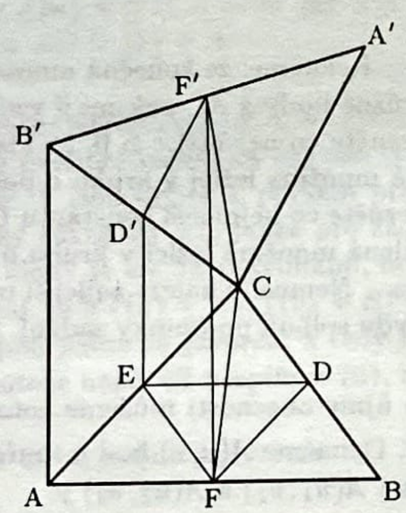
$R - \frac{\sqrt{3}}{2}$ a A některý jeho bod. Pak $A = A(u, v)$ pro některá u, v reálná, najděme $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ celá tak, aby $|u - \tilde{u}|$ a $|v - \tilde{v}|$ byly nejvýše $\frac{1}{2}$. Pak je vzdálenost $A(u, v)$ a $A(\tilde{u}, \tilde{v})$ nejvýše $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $A(\tilde{u}, \tilde{v})$ je tedy prvkem M. Množina těch $A(u, v)$, pro která je $|u - u_0|$ a $|v - v_0|$ nejvýše $\frac{1}{2}$, je kosočtverec o straně jedna. Právě jsme ukázali, že necháme-li $A(u_0, v_0)$ probíhat M, pokryjí nám takové kosočtverce K'. Plocha jednoho kosočtverce je $\frac{\sqrt{3}}{2}$, plocha K' je $\pi(R - \frac{\sqrt{3}}{2})^2$, M má tedy nejvýše $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}(R - \frac{\sqrt{3}}{2})$ prvků. Vyhovuje tedy konstanta $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

(b) Buď $M \subseteq K$ rozptýlená množina a K kruh o poloměru r. Označme K' kruh se stejným středem a poloměrem o $\frac{1}{2}$ větším. Uvažujme ke každému bodu M kruh o poloměru $\frac{1}{2}$ – všechny tyto kruhy leží v K'. Protože vzdálenost libovolných dvou bodů z M je nejvýše 1, žádné dva z těchto kruhů se nepřekrývají. Plocha jejich sjednocení je tedy $|M|\pi(\frac{1}{2})^2$ ($|M|$ značí počet prvků M), plocha K' je $\pi(r + \frac{1}{2})^2$. Porovnáním dostaneme $|M| \leq 4(r + \frac{1}{2})^2$. Konstanta $C = 4$ tedy vyhovuje.

Poznámky. Důkaz části (a) je poněkud nepřehledný, ale konstruuje se tam obyčejná trojúhelníková síť a pak se ukáže, že dost uzlů sítě leží v kruhu. Konstanta $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \doteq 3.63$ je opravdu nejlepší (tj. vyhovuje i v (b)), ale důkaz je složitější. Jestli vymyslím nějaký hezký důkaz do soustředění, tak ho tam zájemcům ukážu. To, co je ve vzorovém řešení, by stačilo na pět bodů; přes upozornění, že na prvním místě je korektnost důkazu, většina řešitelů pouze prohlásila, že je jasné, že trojúhelníková síť je nejlepší, nebo se to pokusili krajně pochybným způsobem zdůvodnit. Navíc se okradli i při odhadu v (a), takže jim vyšlo pouze $c = 3$.



První úloha



Druhá úloha

2. úloha V trojúhelníku ABC zvolíme na straně AB, BC resp. CA bod D, E resp. F. Pro jakou volbu bodů je $|DE| + |EF| + |FD|$ nejmenší?

Jak je dobrým zvykem u podobných úloh, budeme využívat "principu zrcadla". Dívejte se na obrázek. Mějme trojúhelník ABC s největším úhlem při vrcholu C. Označme B' bod souměrně sdružený s B podle přímky AC a A' bod souměrně sdružený s A podle $B'C$. Pro úplnost ještě položme $C' = C$. Zřejmě trojúhelník $A'B'C'$ vznikne z ABC otočením okolo C o úhel 2γ. Označme D', E', F' obrazy D, E, F v tomto otočení. Snadno nahlédneme, že délky lomených čar $FEDF$ a $FED'F'$ jsou stejné. Body F, E, D' můžeme volit libovolně, bod F' je obraz F v otočení.

Pokud je γ ostrý nebo pravý, nabývá se minima v případě, že E a D' leží na FF' a $|FF'|$ je minimální. Protože $\sphericalangle FCF' = 2\gamma$ je pořád stejný, nastane to v případě, že $|FC| = |F'C|$ bude minimální, tedy pokud F bude pata výšky spuštěné z C na stranu AB. Z podmínky, že E a D' leží na FF' snadno odvodíme, že pak i D a E budou paty příslušných výšek (pro pravoúhlý trojúhelník bude $D = E = C$).

Je-li trojúhelník tupoúhlý, bude 2γ větší než π, takže F a F' nepůjde jednoduše spojit úsečkou (neprotínala by úsečky AC a $B'C'$). V tomto případě bude zřejmě nejkratší spojnice pro dané F při volbě $D' = E = C$ a délka lomené čáry bude $2|FC|$. $|FC|$ je opět minimální pro F patu výšky. Minima se tedy u tupoúhlého trojúhelníka nabývá pro $D = E = C$ a F patu výšky na AB.

3. úloha Mějme graf G o n vrcholech, splňující následující podmínku: ke každým dvěma vrcholům a, b existují c a d tak, že dvojice ac, ad, bc a bd jsou spojeny hranou. Dokažte, že vrcholy G lze očíslovat $a_1, \ldots, a_n$ tak, že dvojice $a_1a_2, \ldots, a_{n-1}a_n$, a_na_1 jsou spojeny hranou.

Tvrzení neplatí. Mějme graf o devíti vrcholech $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$. Hranou jsou spojeny dvojice P_iQ_j ($1 \le i \le 5$, $1 \le j \le 4$) a Q_iQ_j ($1 \le i, j \le 4$). Snadno ověříme, že ke každým dvěma vrcholům najdeme dva společné sousedy. Na druhou stranu, kdybychom kružnici procházeli v jednom zvoleném směru, muselo by po každém P_i následovat některé Q_j (P_i a P_j spojeny nejsou), a to po každém jiné; bodů P_i je ale pět a body Q_j jen čtyři. V tomto grafu tedy maximální kružnice neexistuje.

4. úloha Lagrangeova věta praví, že každé přirozené číslo lze napsat jako součet čtverců čtyř *nezáporných* celých čísel. Dokažte, že pokud lze n^2 napsat jako součet k *kladných* celých čísel pro $k = 2, 3, 4$, pak to lze pro všechna k splňující $1 \le k \le n^2 - 14$. Dokažte, že pro $k = n^2 - 13$ už to nejde.

Tam mělo samozřejmě být " ... jako součet k **čtverců** kladných čísel ... ". Vzhledem k citaci Lagrangeovy věty a zdůraznění rozdílu mezi *nezáporných* a *kladných* se to ale dalo pochopit. Lidu sbírkovému (nepředpokládám, že by od časů, kdy jsem byl na gymnáziu, tento typ řešitelů vymřel) prozradím, že úloha je inspirována šestou úlohou z 33. mezinárodní matematické olympiády (Moskva 1992); z tvrzení naší úlohy plyne poměrně snadno plyne řešení té původní[1].

Důkaz druhé části je jednoduchý. Číslo n^2 lze určitě napsat jako součet n^2 jedniček. Vyjádření pomocí menšího počtu čtverců lze chápat tak, že vždy a^2 jedniček nahradíme číslem a^2, čímž počet sčítanců snížíme o $a^2 - 1$. Je zřejmé, že pro vyjádření $n^2 - 13$ čtverci

[1] řešení z následujícího odstavce jsem ale vymyslel až po soutěži

nemůžeme použít $4^2 = 16$ ani nic většího. Použijeme-li výše uvedený pohled na věc, vidíme, že použijeme-li p čtyřek a q devítek, dostaneme $n^2 - 3p - 8q$ sčítanců. Pro žádná $p, q \geq 0$ celá ale není $3p + 8q = 13$.

Známé tvrzení (dokažte si sami – není to těžké) praví, že máme-li $x, y > 1$ celá nesoudělná, pak největší přirozené číslo, které nejde vyjádřit ve tvaru $px + qy$, kde $p, q \geq 0$ jsou celá, je $pq - p - q$. Mějme g, h přirozená (větší než jedna) a poskládejme p-krát g^2 a q-krát h^2. To můžeme provést právě tehdy, když $pg^2 + qh^2 \leq n^2$. Podle tvrzení lze zmenšit počet sčítanců o $m = p(g^2 - 1) + q(h^2 - 1)$ pro $m \geq (g^2 - 1)(h^2 - 1) - (g^2 - 1) - (h^2 - 1)$. Protože $(pg^2 + qh^2) - \big(p(g^2 - 1) + q(h^2 - 1)\big) = p + q \leq m / \min(g^2 - 1, h^2 - 1)$, bude pro $k = n^2 - m = n^2 / \min(g^2, h^2)$ splněna i dodatečná podmínka.

Pro $g = 2$, $h = 3$ dostaneme $n^2 - 14 \geq k \geq \frac{1}{4}n^2$; protože nejmenší číslo, kterého se úloha týká, je $n = 13$, je $\frac{1}{4}n^2 \leq n^2 - 97$. Volba $g = 3$, $h = 4$ nám pak dá řešení pro $n^2 - 98 \geq k \geq \frac{1}{9}n^2$. Pro vyjádření pomocí méně sčítanci budeme postupovat z druhé strany pomocí následujícího klíčového lemmatu:

Lemma. *Buď n přirozené číslo různé od 1 a 3. Pak lze n^2 napsat jako součet čtyř čtverců kladných čísel.*

Je-li $n = ab$, $b^2 = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$, je $n^2 = (ap)^2 + (aq)^2 + (ar)^2 + (as)^2$. Lemma tedy stačí dokázat pro n prvočísla ($n \neq 3$) a pro $n = 9$. Devítka se vyřeší pomocí $81 = 8^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2$. Mějme tedy $n \neq 3$ prvočíslo. Podle Lagrangeovy věty lze n napsat jako součet čtyř čtverců. Rozlišme případy podle toho, kolik z nich je nenulových. Jeden to být nemůže: n je prvočíslo, takže není čtverec. Je-li $n = a^2 + b^2$, je $n^2 = (a^2)^2 + (ab)^2 + (ab)^2 + (b^2)^2$ a žádný sčítanec nemůže být nulový; sem spadá i $n = 2$.

Mějme $n = a^2 + b^2 + c^2$; pak můžeme psát $n^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (ac + bc)^2 + (ac - bc)^2 + (c^2)^2$. První závorka je určitě nenulová, protože jinak by bylo $a^2 + b^2 = c^2$ a n by bylo sudé; jediné sudé prvočíslo (dvojku) však už máme. Určitě můžeme prohodit a, b, c tak, aby $a \neq b$ (kdyby bylo $a = b = c$, bylo by n dělitelné třemi, což prvočísla různá od tří nebývají); pak už je nenulová i třetí závorka.

Mějme $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Pak $n^2 = (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 + (2ad)^2 + (2bd)^2 + (2cd)^2$. Nenulovost první závorky plyne ze stejné úvahy jako v minulém odstavci.

Pokud nyní máme n^2 vyjádřeno jako součet k kladných čtverců, kde $k < \frac{1}{9}n^2$, musí aspoň jeden z nich být větší než devět. Pak na něj aplikujeme lemma a dostaneme vyjádření pomocí $k + 3$ kladných čtverců. Protože víme, že $k = 1, 2, 3$ fungují, dostaneme odtud všechna k splňující $1 \leq k < \frac{1}{9}n^2$, čímž je důkaz hotov. Vida, předpoklad, že najdeme vyjádření pomocí čtyř kladných čtverců, byl zbytečný.

5. úloha Označme $\mathcal{P}$ množinu všech polynomů s reálnými koeficienty (včetně nulového) a pro $p, q \in \mathcal{P}$ definujme přirozeným způsobem pq a $p + q$. Pro $p \in \mathcal{P}$ označme $p\mathcal{P} := \{pq : q \in \mathcal{P}\}$, nazvěme ji *ideálem* generovaným p. Dokažte: množina $A \subseteq \mathcal{P}$ splňuje podmínky

(i) $p, q \in A \implies p + q \in A$
(ii) $p \in A \implies p\mathcal{P} \subseteq A$

právě tehdy, když existuje $r \in \mathcal{P}$ tak, že $A = r\mathcal{P}$. Jinými slovy, tvrzení první úlohy šesté série platí i v této situaci.

Pro polynom p označme $\deg p$ jeho stupeň ($\deg 0 = -1$). Mějme $p, q \in \mathcal{P}$, $q \neq 0$. Tvrdím, že pokud $\deg p \geq \deg q$, pak existuje polynom r tak, že $\deg(p - rq) < \deg p$. Buď $p(x) = p_0x^0 + \cdots + p_mx^m$, $q(x) = q_0x^0 + \cdots + q_nx^n$, $m \geq n$. Pak označme $r(x) = p(x) - q(x)\frac{p_0}{q_0}x^{m-n}$. Pokud $\deg(p - rq) \geq \deg q$, můžeme tento postup opakovat. Po konečném počtu kroků tak dostaneme polynomy r, s takové, že $p = qr + s$ a $\deg s < \deg q$ (není to nic jiného než dělení polynomů se zbytkem; r je podíl a s zbytek).

Snadno opět ověříme, že každá množina typu $p\mathcal{P}$ splňuje (i) a (ii). Mějme tedy $A \subseteq \mathcal{P}$ splňující (i) a (ii). Protože $\{0\} = 0\mathcal{P}$, můžeme se omezit na případ $A \neq \{0\}$. Potom existuje aspoň jeden nenulový polynom v A. Stupně všech takových nenulových polynomů jsou nezáporná celá čísla; označme m nejmenší z nich a q některý polynom z $\mathcal{P}$, který má stupeň m. Mějme nyní nějaký polynom $p \in A$. Potom existují r, s tak, že $p = qr + s$, $\deg s < \deg q$. Podle podmínek (i) a (ii) je ale $s = p - qr \in A$ a protože $\deg s < \deg q = m$, musí nutně (viz. volba q) být $s = 0$. Tedy $p \in q\mathbb{Z}$ a tedy $A \subseteq q\mathbb{Z}$. Naopak, protože $q \in A$, dostaneme snadno z (i) a (ii) opačnou inkluzi. Tedy $q\mathbb{Z} = A$.

Pátou sérii vymyslel **Dr. Jiří Kottas**. Úlohy opravili **Petr Čížek**, **Stanislav Hencl** a **Michal Kubeček**. Vzorová řešení napsal **Petr Čížek**.

Šestou sérii vymyslel **Dr. Jiří Kottas**. Úlohy opravili **Stanislav Hencl**, **Michal Kubeček** a **Vít Novák**. Vzorová řešení napsal **Michal Kubeček**.

Sedmou sérii vymyslel **Michal Kubeček**. Úlohy opravili **Stanislav Hencl**, **Michal Kubeček** a **Tomáš Víšek**. Vzorová řešení napsal **Michal Kubeček**.