5. úloha Nechť trojúhelník ABC je rovnoramenný, $|AB| = |AC|$. Nechť H je pata výšky v_a a E je pata kolmice spuštěné z bodu H na přímku AB. Nechť M je střed úsečky HE. Pak jsou přímky AM a EC navzájem kolmé. Dokažte.

Uvědomme si nejprve, že E leží vždy na úsečce AB. Zvolme na BE bod F tak, aby $HF \parallel CE$. Pak jsou zřejmě $\triangle BHF$ a $\triangle BCE$ podobné. Protože $|BC| = 2|BH|$, je i $|BE| = 2|BF|$. Ze shodnosti odpovídajících úhlů snadno nahlédneme, že $\triangle BHE \sim \triangle BAH$ a $\triangle BAH \sim \triangle HAE$, tedy $\triangle BHE \sim \triangle HAE$. Protože F je střed BE a M je střed HE, jsou podobné také $\triangle BHF$ a $\triangle HAM$. Odtud $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BHF = \sphericalangle HAM$, z čehož už snadno $AM \perp EC$.

Komentáře k 4. sérii

1. úloha Zjistěte jaký je součet všech koeficientů polynomu:

$$(x^5 - 5x^3 + 3x^2 + 2)^{1995}(x^4 - 3x^2 + x + 2)^{1994}$$

Není těžké přijít na to, že součet koeficientů polynomu není vlastně nic jiného než hodnota v jedničce. Součet koeficientů našeho polynomu je tedy $(1^5 - 5 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2)^{1995}(1^4 - 3 \cdot 1^2 + 1 + 2)^{1994} = 1$.

2. úloha Zjistěte zda existuje takový polynom $P(x)$ s nezápornými koeficienty, že $\forall x \in \mathbb{R}$ je $P(x^3 + x) = ((x-3)^{1995} + 1)((x+3)^{1994} + 1)$.

Mějme $Q(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \geq 0$; pak máme $Q(x) + Q(-x) = 2a_m x^m + \cdots + 2a_2 x^2 + 2a_0$, kde $m = n$ pro n sudé a $m = n - 1$ pro n liché, $Q(x) + Q(-x)$ je tedy vždy nezáporné. Předpokládejme, že máme polynom P splňující podmínky zadání. Potom $P(30) + P(-30) = P(3^3 + 3) + P((-3)^3 - 3) = 6^{1994} + 1 + (-6)^{1995} + 1 < 0$, což je spor.

3. úloha Ukažte, že polynom $4(n^3 - n)x^{2n+1} - 3(n^2 - n)x^n + 2x^2 - 1$ nemá pro žádné $n \geq 2$ celočíselný kořen.

V zadání jsme zapoměli uvést, že n má být celé (ale nejspíš to všichni pochopili). Pro každé n přirozené je $n^2 - n = n(n-1)$ sudé číslo. Pro x celé tedy snadno nahlédneme, že $4(n^3 - n)x^{2n+1} - 3(n^2 - n)x^n + 2x^2$ je sudé číslo, a tedy $4(n^3 - n)x^{2n+1} - 3(n^2 - n)x^n + 2x^2 - 1$ liché. Pro žádné x celé to tedy není nula.

4. úloha Mějme funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y, z > 0$ platí

(1) $f(x + y - z) < f(x + y + z)$
(2) $g(x) - f(y) < g(x + y) - f(4y)$.

Dokažte, že pak existuje maximálně jedno reálné řešení rovnice $f(g(g(f(x)))) = 0$.

Ukážeme, že obě funkce f, g jsou rostoucí. Buďte s, t libovolná dvě reálná čísla, $s < t$. Položíme-li $x = s$, $y = z = \frac{1}{2}(t-s)$, bude $y > 0$, $z > 0$ a podle předpokladů tedy $f(s) = f(x+y-z) < f(x+y+z) = f(t)$. Je tedy pro každá dvě reálná čísla $s < t \implies f(s) < f(t)$. Spousta řešitelů se vůbec neobtěžovala ukázat, že pro každá dvě s, t taková, že $s < t$ opravdu najdeme $x \in \mathbb{R}$, $y, z \in \mathbb{R}^+$ tak, že $s = x+y-z$, $t = x+y+z$. Uvědomte si, že kdyby platnost podmínky byla zajištěna např. pouze pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, f už by nemusela být rostoucí.

Mějme opět s, t dvě reálná čísla, $s < t$. Položme $x = s$, $y = t - s$. Pak podle druhé podmínky máme

$$g(x) - f(y) < g(x+y) - f(4y)$$
$$g(s) = g(x) < g(x+y) + f(y) - f(4y) < g(x+y) = g(t)$$

(je totiž $4y > y$, a tedy (f je rostoucí) také $f(y) - f(4y) < 0$). Funkce g je tedy také rostoucí.

Protože složením několika rostoucích funkcí je opět rostoucí funkce ($s < t \implies \varphi(s) < \varphi(t) \implies \psi(\varphi(s)) < \psi(\varphi(t))$, je i $x \mapsto f(g(g(f(x))))$ rostoucí funkce. Tvrzení úlohy pak už je důsledkem toho, že rostoucí funkce je prostá (nemůže nabývat žádné hodnoty více než jednou).

5. úloha Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$(1 - \cos(x+y))(f(x-y+z) + f(-x+y+z) - f(z + z\cos(x+y)))+$$
$$+2f(z)\cos(x+y) - \cos^2(x+y)f(z) = f(z-y) - f(-y).$$

V zadání, které bylo rozesláno, chyběla jedna pravá závorka (teď už tam je – je to před tím plus na konci prvního řádku). Ti, kdo na to pouze upozornili a nepokusili se ji nikam doplnit, obdrželi za tento výkon na úrovni první třídy celý jeden bod. Kdo vyřešil některou z triviálních verzí (jedna z nich se po chybě při psaní zadání objevila coby čtvrtá úloha poslední série loňského ročníku; tentokrát se to Tomáš pokusil napsat správně a zase se mu to nepovedlo), dostal za to tři body. Jeden z řešitelů vyřešil dvě různé triviální verze a dostal 4 body. Ti, kdo vyřešili tu správnou (těžší) úlohu, byli odměněni pěti body. Zvláštního ocenění zasluhuje *Radek Erban (4.G GNPA)*, který rozebral všech 17 možností, kam by závorka mohla patřit a všechny správně vyřešil. Za tento heroický výkon obdržel 6 bodů.

Má-li být rovnost splněna pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$, musí platit také pro takové trojice, pro které je $x = -y$. Pak je $\cos(x+y) = 1$ a dosazením dostaneme $f(z) = f(z-y) - f(-y)$, tedy

$$(1) \qquad \forall x, z \in \mathbb{R}: \ f(z) + f(x) = f(z+x).$$

Dosadíme-li do (1) $z = x = 0$, dostaneme $f(0) = 0$. Dosadíme-li $z = kx$ (k celé), dostaneme $f((k+1)x) - f(kx) = f(x)$. Z těchto dvou vztahů indukcí snadno odvodíme, že

$$(2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}: \ f(kx) = kf(x).$$

Mějme nyní $u \in (0,1)$ a zvolme $x, y \in \mathbb{R}$ tak, aby $\cos(x+y) = 1 - u$. Potom dosazením do rovnice a použitím (1), (2) dostaneme (pro každé $z \in \mathbb{R}$, $u \in (0,1)$)

$$u(f(uz)) + 2f(z)(1-u) - (1-u)^2 f(z) = f(z)$$
$$(3) \qquad f(uz) = uf(z).$$

Uvědomme si, že každé reálné číslo lze napsat ve tvaru $k\alpha$, kde k je celé a $\alpha \in \langle 0, 1)$. Použitím (2) a (3) pak dostaneme $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = xf(1)$; funkce f je tedy typu $f(x) = cx$, kde $c = f(1)$ je reálná konstanta. Dosadíme-li $f(x) = cx$ do rovnice, snadno ověříme, že naopak každá funkce tohoto tvaru je řešením.

Úlohy 3. série posbíral **Michal Kubeček**, čtvrtou vymyslel **Tomáš Víšek**. Obě opravovali **Stanislav Hencl, Michal Kubeček, Vít Novák a Tomáš Víšek.**

Tentokrát se budu snažit být stručný. Iluze o tom, že by mohli všichni řešitelé psát čitelná a srozumitelná (to není totéž) řešení na papír formátu A4 a opatřovat je standardní hlavičkou, si už dávno nedělám. Šířící se zlozvyk nepodepisování řešení bych ale rád potlačil v samém zárodku. Nebijte mne, já sám považuji administrativu za tu zdaleka nejméně zábavnou část organizace semináře (s výjimkou překládání rozmnožených komentářů), ale někdo to dělat musí.

Nová doba s sebou nese nové problémy. Ministerstvo školství už od války považuje za svoji nejdůležitější úlohu střídavé rušení a zavádění deváté třídy; současnost nám to ještě zpestřila zavedení několika typů zcela (nebo částečně) nekompatibilních typů středních škol. Nakonec jsem podlehl a příslušné změny v programu udělal (kromě toho jsem ho napsal celý znovu). Od nynějška se kromě třídy eviduje zvlášť její ekvivalentní vyjádření (0-4). Rozhodl jsem se, že kvarta osmiletých gymnázií a první ročník pětiletých budou mít nulu a první ročník normálních gymnázií bude jednička, aby se všichni dopracovali čtvrtého řádku tabulky v roce, kdy budou maturovat.

Následuje krátké upozornění na časopis Rozhledy matematicko-fyzikální, výsledkové listiny a konečně také zadání posledních dvou sérií. Poslední série se bude opět vracet k tématům předchozích a je o něco obtížnější než bylo letos zvykem. Pořadí po čtvrté sérii, které uvádím, je bez škrtání, připomínám, že do závěrečného pořadí se počítá jen pět nejúspěšnějších sérií.

Pořadí po 4. sérii

1.	*Michal*	*Beneš*	3.D	GWP	25	~~23~~ 12	18	25	**91**
2.	*Norbert*	*Vaněk*	4.D	GWP	21	23	15	25	**84**
3.	*Tomáš*	*Bárta*	3.D	GWP	19	25	15	23	**82**
4–5.	*Robert*	*Šámal*	4.D	GWP	25	14	15	25	**79**
	Jan	*Štola*	2.D	GWP	21	16	18	24	**79**
6.	*Jan*	*Březina*	2.D	GPLB	25	17	11	25	**78**
7.	*Radek*	*Erban*	4.G	GNPA	25	25	-	26	**76**
8.	*Petr*	*Kaňovský*	4.A	GKJB	25	14	15	21	**75**
9.	*Pavel*	*Strnad*	4.A	GPLB	21	17	13	21	**72**
10–11.	*Pavel*	*Příhoda*	2.A	GJKT	21	8	18	24	**71**
	Tomáš	*Suda*	3.A	GKLA	17 ~~19~~	13	16	23	**71**
12.	*Miroslav*	*Krhounek*	qnt	GKNV	22	14	17	17	**70**
13.	*Lenka*	*Koblížková*	4.B	GHJH	~~23~~ 15	19	12	14	**68**