Komentáře k 3. sérii

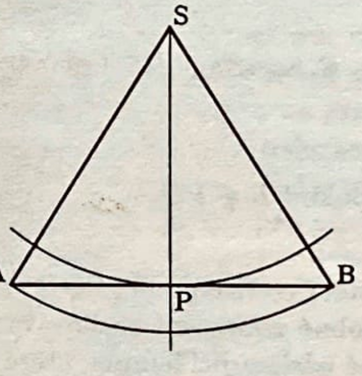
1. úloha Jaká je plocha mezikruží zadaného kružnicí vepsanou a opsanou pravidelnému 1994-úhelníku, který má délku strany rovnu jedné?

Označme S střed 1994-úhelníka, A, B dva sousední vrcholy a P střed úsečky AB. Dále buď r poloměr kružnice vepsané a R poloměr kružnice opsané. Trojúhelník SPB je zřejmě pravoúhlý, $|PB| = \frac{1}{2}$, $|SP| = r$, $|SB| = R$. Podle Pythagorovy věty je pak $R^2 = r^2 + (\frac{1}{2})^2$, takže obsah mezikruží je

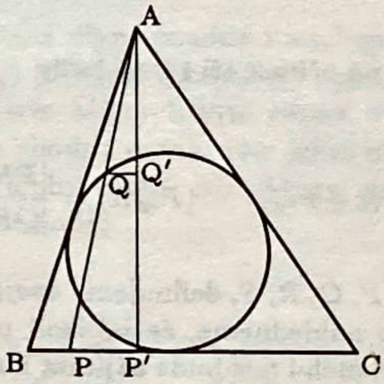
$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \tfrac{1}{4}\pi.$$

úloha Nechť je dán trojúhelník ABC. Zvolme na úsečce BC bod P různý od bodů B a C. Úsečka AP protíná kružnici vepsanou trojúhelníku ABC ve dvou bodech. Označme Q ten z nich, který je blíže k bodu A. Pro kterou volbu bodu P je poměr $\frac{|AQ|}{|AP|}$ minimální?

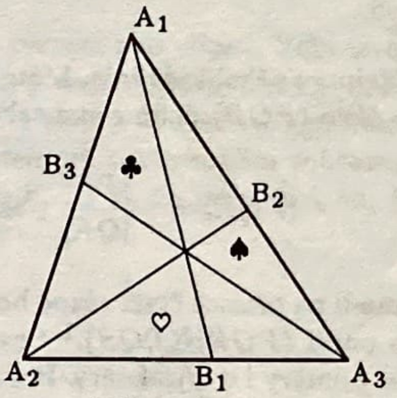
Označme P', Q' kolmé průměty bodů P, Q na výšku v_A (P' je zřejmě pata této výšky). Z podobnosti snadno nahlédneme, že poměr $|AQ| : |AP|$ je stejný jako $|AQ'| : |AP'|$. Délka úsečky AP' je ovšem (viz. výše) stále stejná. Poměr je tedy nejmenší právě tehdy, když je nejmenší $|AQ'|$. To nastává právě tehdy, když Q je souměrně sdružený s bodem dotyku kružnice vepsané a strany BC podle středu kružnice vepsané.



První úloha



Druhá úloha



Třetí úloha

3. úloha Nechť M je vnitřní bod trojúhelníka $A_1A_2A_3$. Přímka MA_1, resp. MA_2, resp. MA_3 protíná protější stranu trojúhelníka v bodě B_1, resp. B_2, resp. B_3. Jak je nutno zvolit bod M, aby trojúhelníky A_2B_1M, A_3B_2M a A_1B_3M měly stejnou plochu?

Jednoduché pozorování: zvolíme-li za M těžiště trojúhelníka, bude mít všech šest trojúhelníků, na které je $A_1A_2A_3$ rozdělen svými těžnicemi, stejný obsah. Mezi nimi i A_2B_1M, A_3B_2M a A_1B_3M. Zbývá ukázat, že jiný bod už tuto vlastnost nemá.

Typeset by AMS-TEX Figures by METAFONT

Máme-li v rovině dány tři body neležící na přímce, můžeme každému bodu M roviny jednoznačně přiřadit trojici čísel α_1, α_2, α_3 tak, že $M = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$ a $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ (to není těžké). Takový M je pak vnitřním bodem trojúhelníka právě tehdy, když $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$. Označíme-li d_i délku strany ležící proti A_i, v_i výšku na ni, a h_i vzdálenost M od této strany, snadno spočítáme, že pak

$$|A_1B_3| = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} d_3 = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3} d_3, \qquad h_3 = \alpha_3 v_3.$$

Cyklickou záměnou (indexy 1,2,3 nahradíme 2,3,1 resp. 3,1,2) odvodíme další čtyři analogické vzorce. Protože obsah trojúhelníka A_1B_3M je $\frac{1}{2}h_3\,|A_1B_3|$, opět použitím cyklické záměny dostaneme: vyhovuje-li M podmínkám zadání, musí být

$$\frac{\alpha_2\alpha_3}{1-\alpha_3} = \frac{\alpha_3\alpha_1}{1-\alpha_1} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_2}.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že α_1 je z našich koeficientů největší. Pak máme $\alpha_2 \leq \alpha_1$ a $1 - \alpha_3 \geq 1 - \alpha_1$, první zlomek je tedy menší nebo roven druhému. Rovnost ale nastává pouze v případě, že $\alpha_2 = \alpha_1$ a $1 - \alpha_3 = 1 - \alpha_1$ (koeficienty jsou z $(0,1)$), tedy pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$ a to je právě tehdy, když M je těžiště.

4. úloha Nechť body C a D dělí na třetiny tětivu AB kružnice k. Nechť P je bod kružnice k různý od bodů A a B. Přímka PD resp. PC protíná kružnici k v bodě E resp. F. Přímka EC resp. FD protíná kružnici k v bodě G resp. H. Přímka GF resp. HE protíná úsečku AB v bodě L resp. M. Potom $|AL| = |BM|$. Dokažte a pokuste se toto tvrzení zobecnit pro elipsu.

Nejprve několik definic. Máme-li na přímce tři různé body P, Q, R, zaveďme *dělící poměr* jako číslo (PQR) definované takto:

$$(PQR) = -\frac{|PR|}{|QR|} \text{ pokud } R \in PQ, \qquad (PQR) = \frac{|PR|}{|QR|} \text{ pokud } R \notin PQ.$$

Máme-li na přímce čtyři různé body P, Q, R, S, definujeme *dvojpoměr* čtveřice bodů $(PQRS)$ jako podíl $(PQR)/(PQS)$.[1] Snadno nahlédneme, že jakékoli podobné zobrazení zachovává dělící poměry i dvojpoměry. Pro tuto úlohu nás bude zajímat hlavně následující lemma, které se dá vyjádřit slovy *"dvojpoměr čtveřice bodů se zachovává při středovém promítání"*.

Lemma: *Mějme přímku p a na ní různé body A, B, C, D; dále mějme přímku p' a bod S, který neleží na p ani p'. Označíme-li A', B', C', D' průsečíky p' s přímkami SA, SB, SC, SD, potom platí $(A'B'C'D') = (ABCD)$.*

Důkaz: Omezíme se na případ, kdy C i D leží na úsečce AB (tvrzení sice platí obecně, ale nám bude tento speciální případ stačit). Pak také C', D' leží na $A'B'$.

[1] základní vlastnosti dělícího poměru a dvojpoměru lze nalézt například v knize *J. Švrček, J. Vanžura: Geometrie trojúhelníka, SNTL 1988.*

Označme $\alpha = \sphericalangle SAB$, $\beta = \sphericalangle SBA$, $\omega_{XY} = \sphericalangle XSY$. Ze sinové věty dostaneme

$$(1) \qquad \frac{|AC|}{\sin\omega_{AC}} = \frac{|SC|}{\sin\alpha}, \quad \frac{|AD|}{\sin\omega_{AD}} = \frac{|SD|}{\sin\alpha}, \quad \frac{|BC|}{\sin\omega_{BC}} = \frac{|SC|}{\sin\beta}, \quad \frac{|BD|}{\sin\omega_{BD}} = \frac{|SD|}{\sin\beta}.$$

Z definice dvojpoměru a toho, že C, D leží na úsečce AB dostaneme za použití (1)

$$(2) \qquad (ABCD) = \frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{\sin\omega_{AC}\sin\beta}{\sin\omega_{BC}\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\omega_{BD}\sin\alpha}{\sin\omega_{AD}\sin\beta} = \frac{\sin\omega_{AC}\sin\omega_{BD}}{\sin\omega_{AD}\sin\omega_{BC}}.$$

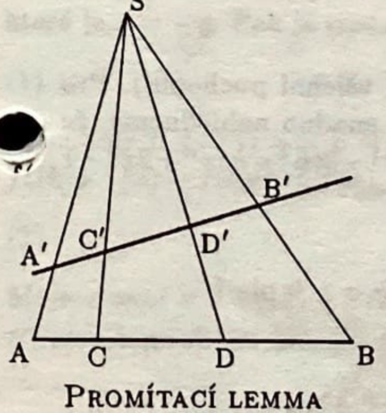
Nyní si stačí uvědomit, že úvahy tohoto odstavce lze "očárkovat" a že výraz úplně napravo v (2) je v obou případech stejný. Tím je lemma dokázáno. Výraz úplně vpravo v(2) se někdy nazývá dvojpoměrem svazku polopřímek SA, SB, SC, SD (jak už bylo řečeno, úhly ω_{XY} jsou vzájemné úhly těchto polopřímek, nezávisí tedy na volbě p).

Zpátky k naší úloze. Z věty o obvodových úhlech víme, že kdykoli vezmeme za X, Y dva z bodů A, G, P, H, B, budou úhly $\sphericalangle XFY$ a $\sphericalangle XEY$ shodné. Použijeme-li rovnost (2) z důkazu lemmatu, dostaneme

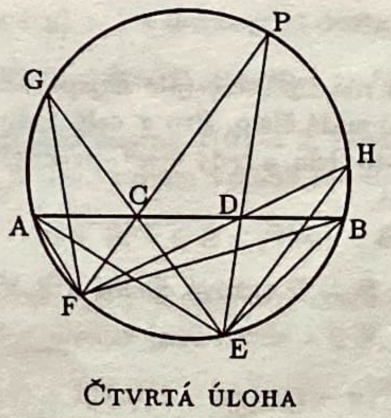
$$(ABCD) = \frac{\sin\sphericalangle AFP \sin\sphericalangle BFH}{\sin\sphericalangle AFH \sin\sphericalangle BFP} = \frac{\sin\sphericalangle AEP \sin\sphericalangle BEH}{\sin\sphericalangle AEH \sin\sphericalangle BEP} = (ABDM)$$

a analogicky také $(ABCD) = (ABLC)$, tedy $(ABDM) = (ABLC)$. A protože $(ABC) = -\frac{1}{2}$, $(ABD) = -2$, dostáváme odtud $(ABL)(ABM) = 1$, odkud už snadno odvodíme, že $|AL| = |BM|$.

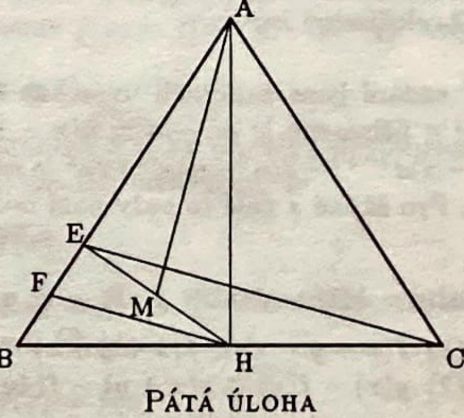
Z platnosti tvrzení pro kružnici plyne snadno i analogické tvrzení pro elipsu. Zobrazení, které bodu o souřadnicích (x, y) přiřadí bod $(x, \alpha y)$ (kde $\alpha > 0$ zachovává přímky a dělící poměry bodů ležících na přímkách. Máme-li nyní elipsu, zvolme za osy souřadného systému její osy; pak snadno nalezneme vhodné α tak, aby jejím obrazem ve zmiňovaném zobrazení byla kružnice. Bude-li tvrzení úlohy platit pro obrazy našich bodů (a to jsme ukázali, že bude), bude platit i pro původní body.



Promítací lemma



Čtvrtá úloha



Pátá úloha

5. úloha Nechť trojúhelník ABC je rovnoramenný, $|AB| = |AC|$. Nechť H je pata výšky v_a a E je pata kolmice spuštěné z bodu H na přímku AB. Nechť M je střed úsečky HE. Pak jsou přímky AM a EC navzájem kolmé. Dokažte.

Uvědomme si nejprve, že E leží vždy na úsečce AB. Zvolme na BE bod F tak, aby $HF \parallel CE$. Pak jsou zřejmě $\triangle BHF$ a $\triangle BCE$ podobné. Protože $|BC| = 2|BH|$, je i $|BE| = 2|BF|$. Ze shodnosti odpovídajících úhlů snadno nahlédneme, že $\triangle BHE \sim \triangle BAH$ a $\triangle BAH \sim \triangle HAE$, tedy $\triangle BHE \sim \triangle HAE$. Protože F je střed BE a M je střed HE, jsou podobné také $\triangle BHF$ a $\triangle HAM$. Odtud $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BHF = \sphericalangle HAM$, z čehož už snadno $AM \perp EC$.

Komentáře k 4. sérii

1. úloha Zjistěte jaký je součet všech koeficientů polynomu:

$$(x^5 - 5x^3 + 3x^2 + 2)^{1995}(x^4 - 3x^2 + x + 2)^{1994}$$

Není těžké přijít na to, že součet koeficientů polynomu není vlastně nic jiného než hodnota v jedničce. Součet koeficientů našeho polynomu je tedy $(1^5 - 5 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2)^{1995}(1^4 - 3 \cdot 1^2 + 1 + 2)^{1994} = 1$.

2. úloha Zjistěte zda existuje takový polynom $P(x)$ s nezápornými koeficienty, že $\forall x \in \mathbb{R}$ je $P(x^3 + x) = ((x-3)^{1995} + 1)((x+3)^{1994} + 1)$.

Mějme $Q(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \geq 0$; pak máme $Q(x) + Q(-x) = 2a_m x^m + \cdots + 2a_2 x^2 + 2a_0$, kde $m = n$ pro n sudé a $m = n - 1$ pro n liché, $Q(x) + Q(-x)$ je tedy vždy nezáporné. Předpokládejme, že máme polynom P splňující podmínky zadání. Potom $P(30) + P(-30) = P(3^3 + 3) + P((-3)^3 - 3) = 6^{1994} + 1 + (-6)^{1995} + 1 < 0$, což je spor.

3. úloha Ukažte, že polynom $4(n^3 - n)x^{2n+1} - 3(n^2 - n)x^n + 2x^2 - 1$ nemá pro žádné $n \geq 2$ celočíselný kořen.

V zadání jsme zapoměli uvést, že n má být celé (ale nejspíš to všichni pochopili). Pro každé n přirozené je $n^2 - n = n(n-1)$ sudé číslo. Pro x celé tedy snadno nahlédneme, že $4(n^3 - n)x^{2n+1} - 3(n^2 - n)x^n + 2x^2$ je sudé číslo, a tedy $4(n^3 - n)x^{2n+1} - 3(n^2 - n)x^n + 2x^2 - 1$ liché. Pro žádné x celé to tedy není nula.

4. úloha Mějme funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y, z > 0$ platí

(1) $f(x + y - z) < f(x + y + z)$
(2) $g(x) - f(y) < g(x + y) - f(4y)$.

Dokažte, že pak existuje maximálně jedno reálné řešení rovnice $f(g(g(f(x)))) = 0$.