Úlohy první série připravil **Dr. Jiří Kottas**. Opravovali **Vít Novák**, **Jana Syrovátková** a **Tomáš Vísek**.

Komentáře k 2. sérii

Úmluva: Je-li $\alpha = [a_1, \dots, a_n]$, budeme psát $\alpha(i) = a_i$ pro $i = 1, \dots, n$ (permutace je vzájemně jednoznačné zobrazení $\{1, \dots, n\}$ na sebe). V souladu s tím označíme $\alpha\beta$ takovou permutaci γ, pro níž $\gamma(i) = \alpha(\beta(i))$, ι buď identická permutace ($\iota(i) = i$). $\alpha^0 = \iota$, $\alpha^{n+1} = \alpha\alpha^n$, α^{-1} buď taková permutace, pro kterou $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \iota$ (rozmyslete si, že taková existuje právě jedna), nakonec $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$. Označme si ještě speciální permutace $\lambda = [2, 3, \dots, n, 1]$ (říkejme jí *levý shift*) a $\tau_{ij}(i) = j$, $\tau_{ij}(j) = i$, $\tau_{ij}(k) = k$ pro $i \neq k \neq j$ (*transpozice*).

Rozmyslete si, že pro libovolnou permutaci $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ je $\alpha\lambda = [a_2, a_3, \dots, a_n, a_1]$. Rozmyslete si také, jak vypadají permutace $\lambda\alpha$, $\alpha\tau_{ij}$ a $\tau_{ij}\alpha$.

1. úloha Uspořádejte všech 24 permutací čísel $\{1, 2, 3, 4\}$ tak, aby každé dvě po sobě jdoucí permutace byly úplně přeházené.

Jedna z možností je např. $[1,2,3,4]$, $[2,3,4,1]$, $[3,4,1,2]$, $[4,1,2,3]$, $[1,3,4,2]$, $[3,4,2,1]$, $[4,2,1,3]$, $[2,1,3,4]$, $[1,2,4,3]$, $[2,4,3,1]$, $[4,3,1,2]$, $[3,1,2,4]$, $[1,4,3,2]$, $[4,3,2,1]$, $[3,2,1,4]$, $[2,1,4,3]$, $[1,3,2,4]$, $[3,2,4,1]$, $[2,4,1,3]$, $[4,1,3,2]$, $[1,4,2,3]$, $[4,2,3,1]$, $[2,3,1,4]$, $[3,1,4,2]$.

2. úloha Dokažte, že pro $n \geq 4$, lze $n!$ permutací čísel $\{1, 2, \dots n\}$ uspořádat tak, aby každé dvě po sobě jdoucí permutace byly úplně přeházené.

Autorské řešení této úlohy jsem nenašel. Proto jsem se rozhodl reprodukovat zajímavou myšlenku z řešení *Patrika Horníka (4.B GAM)*. Pro $n = 4$ už řešení máme (úloha č.1). Řešme nyní úlohu pro $n \geq 5$. Nejprve pomocná tvrzení:

Lemma 0: Permutace α a $\alpha\beta$ se shodují právě na těch místech, na kterých se shodují ι a β. Permutace α a $\beta\alpha$ se shodují právě na tolika místech, na kolika se shodují ι a β. *(Důkaz je natolik snadný, že jej přenecháme laskavému čtenáři za cvičení.)*

Lemma 1: Pro $n \geq 3$ lze uspořádat všech $n!$ permutací n-prvkové množiny tak, aby žádné dvě po sobě jdoucí nebyly úplně přeházené.

Důkaz: Uspořádání bude vypadat tak, že nejprve bude $(n-1)!$ permutací začínajících jedničkou, pak $(n-1)!$ permutací začínajících dvojkou atd. Je zřejmé, že permutace v každé skupině můžeme libovolně prohazet, aniž bychom tím způsobili, že po sobě jdoucí permutace ve stejné skupině budou úplně přeházené. První skupinu tedy ponecháme jak je a ve druhé dáme na začátek takovou permutaci začínající dvojkou, která se bude s poslední z první skupiny shodovat aspoň na jednom místě. Je-li poslední z první skupiny α, lze použít např. $\tau_{12}\alpha$, ta se podle Lemmatu 0 shoduje s α na $n-2 \geq 1$ místech. Takto postupně modifikujeme ostatní skupiny. Vždy, označíme-li α poslední permutaci k-té skupiny, v $(k+1)$-ní dáme na začátek $\tau_{k,k+1}\alpha$. Tím dostaneme vyhovující uspořádání.

Lemma 2: Shodují-li se permutace α a β aspoň na dvou místech, existuje $k \in \{1,\dots,n-1\}$ takové, že $\alpha\lambda^k$ a β jsou úplně přeházené.

Důkaz: Označme si p_i počet míst, na kterých se shodují $\alpha\lambda^i$ a β a q_i počet těch k, pro která se $\alpha\lambda^k$ a β shodují na i-tém místě. Snadno nahlédneme, že $p_0+\dots+p_{n-1} = q_0+\dots+q_{n-1}$. Na druhou stranu si ale uvědomme, že v permutacích $\alpha\lambda^k$ se pro $k \in \{0,\dots,n-1\}$ vystřídá na libovolném místě každé z čísel $1,\dots,n$ právě jednou. Všechna q_i jsou tedy rovna jedné. Pak ale $p_0+\dots+p_{n-1} = n$. Protože ale předpokládáme, že $p_0 \geq 2$, musí nutně existovat i, pro které je $p_i = 0$ (a samozřejmě $i \neq 0$).

Nyní k vlastnímu řešení úlohy. Označme si $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ všechny permutace čísel $\{1,\dots,n\}$ takové, že $\alpha_i(1) = 1$ ($N = (n-1)!$). Tyto permutace zřejmě přirozeným způsobem odpovídají všem permutacím čísel $\{2,3,\dots,n\}$. Podle Lemmatu 1 je tedy můžeme uspořádat tak, aby se vždy α_i a α_{i+1} shodovaly aspoň na jednom místě jiném než prvním. Celkově se tedy každé dvě sousední budou shodovat aspoň na dvou místech.

Není těžké si uvědomit, že každou permutaci $\{1,\dots,n\}$ můžeme jednoznačně napsat ve tvaru $\alpha_i\lambda^k$, kde $i \in \{1,\dots,N\}$, $k \in \{0,\dots,n-1\}$. Dále z Lemmatu 0 snadno dostaneme, že pro $j \neq k$ je $\alpha_i\lambda^j$ úplně přeházená s $\alpha_i\lambda^k$. Narovnáme-li za sebe vždy $\alpha_i, \alpha_i\lambda, \dots, \alpha_i\lambda^{n-1}$, dostaneme blok permutací takový, že každé dvě z něj jsou úplně přeházené. Srovnáme-li teď bloky za sebe podle hodnot i, vidíme, že stačí ukázat, že lze vždy i-tý blok ($i = 1,\dots,N-1$) přerovnat tak, aby na začátku zůstala α_i a na konci byla nějaká permutace, která je úplně přeházená s α_{i+1}. To, že blok takovou obsahuje (a že to není α_i) ovšem zaručuje Lemma 2, neboť α_i a α_{i+1} se shodují aspoň na dvou místech.

3. úloha Nechť α a β jsou úplně přeházené permutace čísel $\{1,2,\dots n\}$ ($n \geq 4$). Pak existují permutace γ a δ tak, že každá z nich je úplně přeházená s α i β. Dokažte.

Jak si několik řešitelů povšimlo, vypadlo ze zadání slůvko různé. Kdybychom ovšem nepožadovali, aby $\gamma \neq \delta$, nechtěli bychom po vás hledat dvě permutace a spokojili bychom se s jednou. Ukážu zde řešení, pro které budou dokonce γ a δ úplně přeházené.

Nazvěme *cyklem* takovou permutaci $\gamma = (a_1a_2\dots a_k)$ ($2 \leq k \leq n$; $a_1, \dots, a_k$ různá), pro kterou je $\gamma(a_i) = a_{i+1}$ pro $i < k$ a $\gamma(a_k) = a_1$. Podle nového značení $\tau_{ij} = (ij)$. Rozmyslete si, ze každou permutaci lze zapsat jako součin po dvou disjunktních cyklů (cykly nazveme disjunktní, jestliže neobsahují společný prvek). Dále si rozmyslete, že použitím Lemmatu 0 lze úlohu převést na případ $\beta = \iota$ (přenásobíme všechny čtyři permutace permutací β^{-1}. Je také užitečné si uvědomit, že jsou-li η a ξ disjunktní cykly, je $\eta\xi = \xi\eta$.

Nechť $\alpha = (a_1b_1)(a_2b_2)\dots(a_pb_p)(c_1d_1e_1)\dots(c_qd_qe_q)\eta_1\dots\eta_r$, kde η_i jsou cykly aspoň čtyř prvků. Navíc lze α takto přepsat takovým způsobem, že použité cykly jsou po dvou disjunktní. Všimněme si, že pro $p = q = 0$ stačí zvolit jednoduše $\gamma = \alpha^2$, $\delta = \alpha^3$. Označme $\eta = \eta_1\dots\eta_r$. Tvrdíme, že hledané permutace lze vzít ve tvaru $\gamma = \sigma_1\eta^2$, $\delta = \sigma_2\eta^3$. Zbývá najít vhodné σ_1, *sigma*$_2$ pro $p+q > 0$. Je-li $p \neq 1$, $q \neq 1$, funguje např. $\sigma_1 = (a_1a_2\dots a_p)(b_1b_2\dots b_p)$, $\sigma_2 = (a_1b_1)(a_2b_2)\dots(a_pb_p)(c_1d_1e_1)\dots(c_qd_qe_q)\sigma_1$ (napište si tabulku).

Je-li $p = 1$, $q = 1$, bude fungovat následující:

$$\begin{array}{lccccc}
\iota & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\
\alpha & b_1 & a_1 & d_1 & e_1 & c_1 \\
\sigma_1 & c_1 & d_1 & e_1 & a_1 & b_1 \\
\sigma_2 & d_1 & e_1 & b_1 & c_1 & a_1
\end{array}$$

Pro $p = 1$, $q \geq 3$ resp. $p \geq 3$, $q = 1$ lze udělat totéž s tím, že se zbývajícími dvoj- nebo trojcykly naložíme stejně jako nahoře (jsou aspoň dva). Je-li $p = 1$, $q = 2$, uděláme následující:

$$\begin{array}{lcccccccc}
\iota & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & c_2 & d_2 & e_2 \\
\alpha & b_1 & a_1 & d_1 & e_1 & c_1 & d_2 & e_2 & c_2 \\
\sigma_1 & c_1 & c_2 & a_1 & d_2 & e_2 & b_1 & d_1 & e_1 \\
\sigma_2 & c_2 & c_1 & d_2 & e_2 & a_1 & d_1 & e_1 & b_1
\end{array}$$

Pro $p = 2$, $q = 1$ provedeme toto:

$$\begin{array}{lccccccc}
\iota & a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & c_1 & d_1 & e_1 \\
\alpha & b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & d_1 & e_1 & c_1 \\
\sigma_1 & c_1 & d_1 & e_1 & a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\
\sigma_2 & d_1 & c_1 & a_1 & e_1 & a_2 & b_2 & a_1
\end{array}$$

Konečně, je-li $p = 1$, $q = 0$, pak musí být $r \geq 1$ (dohromady cykly pokrývají celé $\{1, \ldots, n\}$). Pak rozbijeme cyklus $\gamma_1 = (f_1 \ldots f_s)$ $(s \geq 4)$. V tomto případě stačí zvolit $\sigma_1 = (a_1 f_1)(b_3 f_4)$, $\sigma_2 = (a_1 f_2)(b_1 f_3)$ (nakreslete si opět tabulku). Analogicky, bude-li $p = 0$, $q = 1$, dospějeme k řešení pomocí $\sigma_1 = (c_1 f_1)(d_1 f_2)(e_1 f_3)$, $\sigma_2 = (c_1 f_3)(d_1 f_4)(e_1 f_2)$.

4. úloha Kolik je permutací čísel $\{1, 2, \ldots n\}$, které jsou úplně přeházené s permutací $[1, 2, \ldots n]$?

Všech permutací je $n!$. Od těchto je třeba odečíst počet těch permutací, které se mají na i-tém místě i. Těch je $n(n-1)!$. Tak ovšem odečtu dvakrát ty permutace, které mají na i-tém místě i a na k-tém místě k, $k \neq i$. Jejich počet je tedy třeba přičíst. A tak dále. Tento obecný postup se nazývá princip inkluze a exkluze. Snadno již nahlédneme, že námi hledaný počet permutací je

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{i} (n-i)!$$

5. úloha Nechť $n = 9$. Každou permutaci čísel $\{1, 2, \ldots 9\}$ lze chápat jako zápis devíticiferného čísla v desítkové soustavě. Označme U množinu všech permutací, které jsou úplně přeházené s permutací $[1, 2, \ldots 9]$. Jaká je, při výše uvedené interpretaci, průměrná hodnota čísel z množiny U?

Označme S množinu všech permutací úplně přeházených s ι a P jejich počet (spočítali jsme ho ve čtvrté úloze).

Lemma 3: Mějme čísla $1 \leq i, j \leq 9$, $i \neq j$. Pak je počet těch permutací čísel úplně přeházených s ι, které mají na i-tém místě j, roven $P/8$.

Důkaz: Stačí ukázat, že vezmeme-li si čísla j a k, $j \neq i \neq k \neq j$, najdeme bijekci mezi permutacemi úplně přeházenými s ι, které mají na i-tém místě j, a těmi, které tam mají k. Označme si J_0, J_1, K_0, K_1 množiny těch permutací $\alpha \in S$, které splňují příslušnou vlastnost:

$$\begin{array}{ll} J_0: & \alpha(i) = j,\ \alpha(j) \neq k \\ J_1: & \alpha(i) = j,\ \alpha(j) = k \\ K_0: & \alpha(i) = k,\ \alpha(k) \neq j \\ K_1: & \alpha(i) = k,\ \alpha(k) = j \end{array}$$

Najdeme-li bijekci mezi J_0 a K_0 a mezi J_1 a K_1, budeme hotovi. Zobrazení $\alpha \mapsto (jk)\alpha$ zobrazí J_0 do K_0 (toto zobrazení prostě prohodí v α čísla j a k). Máme totiž $\alpha(i) = j \implies (jk)\alpha(i) = k \neq i$, $\alpha(k) \neq k \implies (jk)\alpha(k) = \alpha(k) \notin \{j,k\}$, $\alpha(j) \neq k \implies (jk)\alpha(j) \neq j$. Zobrazení je ale bijekce na množině všech permutací, která je inverzní sama k sobě a stejným způsobem ukážeme, že zobrazuje K_0 do J_0. Je to tedy hledaná bijekce. Zobrazení $\alpha \mapsto \alpha(ijk)$ pak zobrazuje J_1 do K_1: Je totiž $\alpha(ijk)(i) = \alpha(j) = k$, $\alpha(ijk)(j) = \alpha(k) \notin \{j,k\}$ a $\alpha(ijk)(k) = \alpha(i) = j$. Opět je to bijekce na množině všech permutací a snadno se ukáže, že inverzní zobrazení $\alpha \mapsto \alpha(ikj)$ zobrazuje K_1 do J_1.

Nyní už spočítáme aritmetický průměr. Je roven

$$\frac{1}{P}\sum_{\sigma\in S}\sum_{i=1}^{9}10^{10-i}\sigma(i) = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{9}10^{10-i}\sum_{\sigma\in S}\sigma(i) = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{9}10^{10-i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{9} j\frac{P}{8} =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}10^{10-i}(45-j) = \tfrac{1}{8}(45\cdot 111111111 - 123456789).$$

Druhá rovnost je jednoduchým důsledkem Lemmatu 3, třetí se odvodí tak, že nejprve vytkneme $P/8$ a potom si uvědomíme, že součet j ve vnitřní sumě je roven $1+2+\cdots+9-j = 45-j$.

Úlohy druhé série vymyslel **Tomáš Víšek**. Řešení opravili **Stanislav Hencl**, **Michal Kubeček** a **Jana Syrovátková**.

Seznam škol

GAHL Gymnázium, Adámkova tř. 55, 53901 Hlinsko v Čechách; **GAM** Gymnázium, Grösslingova 18, Bratislava; **GAMO** Gymnázium, Čs. armády, 43401 Most; **GAR** Gymnázium, Arabská 14, 16000 Praha 6; **GBEN** Gymnázium, Husova 270, 25601 Benešov; **GBER** Gymnázium, Wagnerovo náměstí, 26601 Beroun 2; **GBNL** Gymnázium Brandýs nad Labem; **GBOP** Gymnázium, Botičská 1, 12000 Praha 2; **GBRU** Gymnázium Bruntál; **GCCK** Gymnázium, Chvalšinská 112, 38101 Český Krumlov; **GDAC** Gymnázium, B. Němcové 213/V., 38001 Dačice; **GDPA** Gymnázium, Dašická 1083, 53003 Pardubice; **GDTP** Gymnázium Poprad; **GHBR** Gymnázium Havlíčkův Brod; **GHJH** Gymnázium, Husova 33, 37715 Jindřichův Hradec; **GHOM** Gymnázium, Hejčín, Olomouc; **GHUM** Gymnázium, Hradská 894, 39601 Humpolec; **GJCB** Gymnázium, Jírovcova 8, 37161 České Budějovice; **GJGT** Gymnázium, J. G. Tajovského, Banská Bystrica; **GJIC** Gymnázium Jičín; **GJKT** Gymnázium, Tylovo nábřeží 682, 50223 Hradec Králové; **GJLB** Gymnázium, Jeronýmova 27, 46007 Liberec 7; **GJNE** Gymnázium, Hellichova 3, 11800 Praha 1; **GJUL** Gymnázium, Jateční 22, 40001 Ústí nad Labem; **GKJB**