upozornil, že každou úlohu opravuje někdo jiný, a to současně na různých místech. V jejich případě to obvykle dopadne tak, že jim celou sérii opravím já (a obvykle na tom nevydělají).

Co se opisovačů týče, týmovou práci nevylučujeme. Problém je ovšem v tom, že za kolektivní práci budou také kolektivně odměněni. Za zcela správné řešení vyrobené ve dvou lidech pak dostanou pět bodů dohromady (po zaokrouhlení dva pro každého).

za organizátory

Michal Kubeček

Tabulka bonifikací

součet	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1. roč.	0	2	4	6	8	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	21	22	22	23	23	24	24	25	25
2. roč.	0	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	24	25	25
3. roč.	0	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	23	25
4. roč.	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	19	21	23	25

Komentáře k 1. sérii

Jako obvykle, první série patřila k těm jednodušším. Za (pro někoho možná matoucím) označením *Dirichletův princip* se skrývá následující jednoduché tvrzení: mám-li n množin $A_1, \ldots, A_n$, jejichž sjednocení má $n+1$ prvků, pak aspoň jedna z nich musí být aspoň dvouprvková. Lidově: dám-li do n šuplíků $n+1$ ponožek, musí být v některém aspoň dvě.

1. úloha V rovině je čtverec o straně 6 a v něm 37 bodů. Dokažte, že existuje 5 bodů, které leží uvnitř nebo na hranici čtverce o straně 2.

Čtverec o straně 6 lze rovnoběžkami s jeho stranami rozdělit na 9 čtverců o straně 2. Kdyby uvnitř, či na hranici každého ležely nejvýše 4 body, bylo by v celém čtverci maximálně 36 bodů. Což jest spor.

2. úloha Mějme Fibonacciho posloupnost, která je definována následovně: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Lze vyjádřit každé přirozené číslo jako součet (několika) různých Fibonacciho čísel?

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Pro $k = 1$ tvrzení jistě platí. Nechť platí i pro všechna $i \leq k$, k libovolné. Ukažme, že tvrzení platí i pro $k+1$. Je-li $k+1$ Fibonacciho číslo, je tvrzení jistě pravdivé. Není-li, odečtěme od něj největší Fibonacciho číslo menší než $k+1$ (označme ho a_n). Pokud bude $(k+1)-a_n < a_n$, jsme díky indukčnímu předpokladu hotovi. $(k+1)-a_n$ tak totiž bude součtem Fibonacciho čísel, mezi nimiž není a_n. K tomu aby bylo $(k+1)-a_n < a_n$ stačí aby bylo $a_{n+1}-a_n < a_n$, to jest $a_n + a_{n-1} - a_n < a_n$, což zajisté platí. Tím je důkaz dokončen.

3. úloha V rovině je dáno n nekolineárních bodů $\{x_1, \ldots, x_n\}$, z nichž některé jsou spojeny úsečkami (existuje alespoň jedna úsečka). Označme $p(x_k)$ počet bodů, s nimiž je x_k spojeno úsečkou. Je-li $p(x_k) = p(x_l), k \neq l$,pak neexistuje x_i různé od x_l a x_k, že x_i je spojeno úsečkou s x_k i x_l. Dokažte, že pak existuje $x_j \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, že $p(x_j) = 1$.

Tvrzení dokážeme sporem. Nechť jsou všechna čísla $p(x_i)$ různá od jedné. Označme P největší z nich (podle zadání $P \geq 1$); x_m buď některý z bodů, pro které je $p(x_m) = P$. x_m je pak spojen úsečkou právě s P body. Protože každé dva z nich mají společného souseda (x_m), musí mít podle předpokladů každé dva z nich různý počet sousedů. V úvahu však přicházejí pouze čísla od 2 (0 nejde, protože sousedí aspoň s x_m, 1 podle předpokladu) do P (maximum). Těch je ale jen $P-1$, což je spor.

4. úloha Během semináře z matematické analýzy, na který se dostavilo pouze pět studentů, každý z těchto studentů právě dvakrát usnul. Ke každé dvojici těchto studentů existoval okamžik, kdy spali oba z dvojice současně. Dokažte, že existoval okamžik, kdy spali alespoň tři studenti současně.

Sporem, předpokládejme, že tvrzení neplatí, pak existuje deset navzájem disjunktních (časových) intervalů, kdy spí právě dva studenti. Počáteční bod každého takového intervalu je okamžik, kdy usnul nějaký student. Vzhledem k tomu, že každý z pěti studentů usnul právě dvakrát, dostáváme tak vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi těmito intervaly a okamžiky, kdy jednotliví studenti usínali. Podívejme se na počáteční bod T_0 prvního z těchto intervalů. Dle předchozích úvah je to okamžik, kdy usnul první student a ostatní usnuli poprvé až později. To je ovšem spor s tím, že od okamžiku T_0 spí dva studenti.

Poznámka od opravovatele: Uff, to jsme si dali! Většina řešení byla tak zoufale nepřehledných, že opravovat je bylo hotové utrpení. Prosba všem řešitelům: zkuste si po sobě své řešení alespoň jednou nestranně přečíst. Vyhnete se tak nebezpečí, že vaše řešení budou obsahovat věty, které nebudou (jazykově) dávat žádný smysl.

5. úloha Mezi libovolnými osmi složenými čísly z množiny $\{1, 2, 3, 4, \ldots 360\}$ existují vždy dvě čísla, která nejsou nesoudělaná.

Protože $19^2 = 361$, můžeme každé složené číslo z $\{1, 2, 3, 4, \ldots 360\}$ zařadit do jedné z množin A_2, A_3, A_5, A_7, A_{11}, A_{13}, A_{17} podle toho, jaký je jeho nejmenší prvočíselný dělitel. Podle Dirichletova principu, vybereme-li z těchto sedmi množin osm prvků, museli jsme aspoň z jedné vybrat aspoň dva. Bylo-li to z A_p, pak tato dvě čísla mají společného dělitele p.