5. série

Kombinatorika

1. ÚLOHA
Při hře v karty dostane hráč rozdáno 10 karet (ze 32, 4 barvy po 8 kartách). Rozdání označíme pro hráče za příznivé, má-li ve své ruce alespoň 6 karet jedné barvy a zbylé karty mají (jinou) shodnou barvu. Kolik různých příznivých rozdání existuje? (Různá rozdání jsou ta, když alespoň jedna karta v ruce našeho hráče se liší.)

2. ÚLOHA
Ve fotbalovém utkání se střetly dva jedenáctičlenné týmy. Kolika způsoby z nich lze vybrat nejlepších 9 hráčů, aby z každého týmu mezi nimi byli alespoň 3?

3. ÚLOHA
Najděte všechny řádky Pascalova trojúhelníka, ve kterých jsou jen lichá čísla.

4. ÚLOHA
Kolik existuje celých čísel z, že pro jejich desítkový zápis $z = a_n a_{n-1} \dots a_0$ (tj. $z = a_0 + a_1 10^1 + \dots + a_n 10^n$) existuje $j \leq n$ takové, že pro $i > j$ je $a_i < a_{i-1}$ a pro $i < j$ je $a_i < a_{i+1}$. Jinak řečeno, číslice nejprve rostou a pak klesají.

5. ÚLOHA
Nechť $m, n \in \mathbb{N}, 2m \leq n$. Pak

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{2m+n-1-2i}{n-1} = \binom{n}{2m}.$$

Řešení 5. série

1. ÚLOHA

Nejprve je třeba vybrat barvu, v níž má hráč alespoň 6 karet. Máme 4 možnosti. Dále je třeba vybrat z této barvy $6, 7, 8$ karet. To lze $\binom{8}{6}, \binom{8}{7}, \binom{8}{8}$ způsoby. Ze zbylých 3 barev vybereme jednu a v ní $4, 3, 2$ karty. Celkem tedy máme

$$4\binom{8}{6}3\binom{8}{4} + 4\binom{8}{7}3\binom{8}{3} + 4\binom{8}{8}3\binom{8}{2} = 12\left(\binom{8}{2}\binom{8}{4} + 8\binom{8}{3} + \binom{8}{2}\right)$$

způsobů.

2. ÚLOHA

Úlohu lze řešit dvěma způsoby.

Vybereme z každého družstva 3 hráče a doplníme je libovolně z ostatních. Tím ovšem započítáme některé případy dvakrát. Ty je třeba odečíst. Tento postup se nazývá princip inkluze a exkluze.

Vezmeme všechny možné výběry 9 hráčů z 32 a odečteme ty, které podmínku nesplňují. Tj. z jednoho družstva je hráč jeden, dva, či žádný. Takových možností máme po řadě $2\binom{11}{9}, 2 \cdot 11\binom{11}{8}, 2\binom{11}{2}\binom{11}{7}$. Celkem je tedy $\binom{22}{9} - 2\binom{11}{9} - 2 \cdot 11\binom{11}{8} - 2\binom{11}{2}\binom{11}{7}$ způsobů.

3. ÚLOHA

Nejprve ukážeme, že $\forall n \in \mathbb{N}$ jsou v 2^n řádku pouze lichá čísla. i-tý prvek v tomto řádku je $\binom{2^n-1}{i} = \frac{(2^n-1)(2^n-2)\dots(2^n-i)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot i}$. A protože $\forall k \in \mathbb{N}, k \leq n, m \in \mathbb{N}$ je $2^n - m$ dělitelné 2^i, právě tehdy, když 2^i dělí m. Tedy v čitateli i jmenovateli zlomku je 2 ve shodné mocnině a $\binom{2^n-1}{i}$ je číslo liché.

4. ÚLOHA

Vezměme číslici 9. Z ní lze takové celé číslo vytvořit právě jedno. Dále veznměme číslici 8 a počítejme, kolik nových čísel může vzniknout. Buď může stát osmička samostatně, nebo ji lze položit před číslici 9, za ní, před ní i za ní, a nebo je ji možno nepoužít (tj. mám čísla $8, 89, 98, 898, 9$). Nových čísel je $4 \cdot 1$ celkem tedy $4 \cdot 1 + 1$. Takto lze jistě pokračovat až do číclice 1. Vznikne tak $1+4(\dots(1+4(1+4\cdot 1))\dots) = 4^8+4^7+\dots+4+1$ čísel. Číslici 0 lze přidat pouze na konec, nebo ji nechat samostatně. Mám tedy $2\frac{4^9-1}{3}+1$ možností.

5. ÚLOHA

Na pravé straně rovnosti je počet kombinací $2m$ prvků z n prvků. Spočítejme, kolik je kombinací s opakováním $2m$ prvků z n prvků, kdy se daných i prvků opakuje alespoň dvakrát. Těch je právě tolik, kolik je kombinací s opakováním $2m - 2i$ prvků z n prvků, tj.

$$P_i = \binom{n}{i}\binom{2m+n-1-2i}{n-1}.$$

Podle principu inkluze a exkluze je pak počet $2m$ prvkových kombinací z n prvků roven $P_0 - P_1 + P_2 - \cdots + (-1)^m P_m$, což je výraz na levé straně.