4. série

Polynomy, funkcionální rovnice

1. Úloha

Nechť $P(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Dokažte, že nemůže zároveň platit:

$$P(5) = 3 \quad \text{a} \quad P(7) = 10.$$

2. Úloha

Najděte všechna řešení funkcionální rovnice:

$$f(x+y) - f(x) - x\sqrt{f(y)} - y(y+x) = 0, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

3. Úloha

Dokažte, že neexistuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro níž platí $f(f(x)) = 2x^2 - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. Úloha

Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí: $f(3x-1) = f(x)$.

5. Úloha

Najděte všechna spojitá řešení funkcionální rovnice

$$f(x)(f(y)+y) + x(f(y) - 1 + y) - f(x+y) - y = 0.$$

Řešení 4. série

1. ÚLOHA

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, kde a_i jsou celá pro všecna $i \in \{0, \ldots, n\}$. A nechť platí

$$P(5) = a_n 5^n + \cdots + a_1 5 + a_0 = 3$$
$$P(7) = a_n 7^n + \cdots + a_1 7 + a_0 = 10$$

Nyní počítejme $P(7) - P(5) = a_n 7^n + \cdots + a_1 7 + a_0 - a_n 5^n - \cdots - a_1 5 - a_0 = a_n(7^n - 5^n) + \cdots + a_1(7-5) = 10 - 3 = 7$.Ale víme, že $7^k - 5^k = (7-5)(7^{k-1} + 7^{k-2}5^2 + \cdots + 5^{k-1})$, tedy $2 \mid ((7^n - 5^n)a_n + \cdots + (7-5)a_1)$. A to je spor neboť 2 nedělí 7.

2. ÚLOHA

Položme $x = 0$. Pak máme

$$f(y) - f(0) - y^2 = 0$$
$$f(y) = y^2 + f(0)$$

Označme $f(0) = c$. Existuje-li tedy řešení dané funkcionální rovnice, je tvaru $f(x) = x^2 + c$. Dosaďme zpět do původní funkcionální rovnice.

$$x^2 + 2xy + y^2 + c - x^2 - c - x\sqrt{y^2 + c} - y^2 - xy = 0$$
$$xy = x\sqrt{y^2 + c}$$
$$y = \sqrt{y^2 + c}$$

To ale nemůže být pro žádné c a $y < 0$ splněno. Tedy daná funkcionální rovnice nemá žádné řešení.

3. ÚLOHA

Nechť taková funkce f existuje. Řešme rovnici $f(f(x)) = x$. Musí být $2x^2 - x - 1 = 0$. Řešeními tedy jsou $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$. Dále řešme rovnici $f(f(f(f(x)))) = x$, tj.

$$2(2x^2 - 1)^2 - 1 = x$$
$$8x^4 - 8x^2 - x + 1 = 0$$

Určitě řešením musí být $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$. Lze tedy vytknout $(x-1)(2x+1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$. Máme tedy další kořeny $x_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ a $x_4 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$. Je vidět, že $f(f(x_3)) = x_4$ a $f(f(x_4)) = x_3$. Označme $f(x_3) = c$.Jistě je $f(f(f(f(c)))) = f(f(f(x_4))) = f(x_3) = c$.

Rozeberme jednotlivé případy:

$c = x_1$:	$x_4 = f(c) = f(x_1) = f(f(f(x_1))) = f(x_4) = x_3$	SPOR
$c = x_2$:	$x_4 = f(c) = f(x_2) = f(f(f(x_2))) = f(x_4) = x_3$	SPOR
$c = x_3$:	$x_4 = f(c) = f(x_3) = x_3$	SPOR
$c = x_4$:	$x_4 = f(c) = f(x_4) = f(f(x_4)) = x_3$	SPOR

4. ÚLOHA

Nechť $c_0 \in \mathbb{R}$. Vytvořme posloupnost $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ tak , aby bylo $3c_i - 1 = c_{i-1}$, čili $c_i = \frac{c_i+1}{3}$. Tedy $c_i = \frac{c_0 + \frac{3^i-1}{2}}{3^i}$ a pak $\lim\limits_{i\to\infty} c_i = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{2c_0+3^i-1}{2\cdot 3^i} = \frac{1}{2}$. Ze spojitosti musí tedy být $f(c_0) = f(\frac{1}{2})$ a to $\forall x \in \mathbb{R}$. Tedy řešením jsou pouze funkce $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$.

5. ÚLOHA

Upravme nejprve rovnici do podoby $(f(x) + x)(f(y) + y) = f(x + y) + x + y$. Nechť f je nějaké spojité řešení této rovnice, pak funkce $g(x) = f(x) + x$ je spojitým řešením funkcionální rovnice $g(x)g(y) = g(x + y)$. Nyní ukážeme, že buď $\forall x \in \mathbb{R}$ je $g(x) = 0$, nebo $\forall x \in \mathbb{R}$ je $g(x) > 0$. Nechť $x_0 = 0$, pro nějaké $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak $\forall x \in \mathbb{R}$ je $g(x) = g((x - x_0) + x_0) = g(x - x_0)g(x_0) = 0$. Naopak je-li $g(x_0) \neq 0$, pak je $g(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $g(x) = g(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = (g(\frac{x}{2}))^2 > 0$. Rovnici můžeme logaritmovat a dostaneme $\ln g(x) + \ln g(y) = \ln g(x+y)$. Je-li $g(x)$ řešením této rovnice, je $h(x) = \ln g(x)$ řešením Cauchyho rovnice $h(x)+h(y) = h(x+y)$. Jediným spojitým řešením Cauchyho rovnice je $h(x) = cx, c \in \mathbb{R}$. Jediným kandidátem na řešení původní rovnice je tedy $f(x) = e^{cx} - x$. Dosazením ověříme, že tato funkce skutečně rovnici vyhovuje.