2. série
Diskrétní úlohy

1. Úloha
Dokažte, že pro každé n přirozené platí

$$1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.$$

2. Úloha
V prvním ročníku MFF UK se sešlo 6 dívek, z nichž některé se již dříve znaly (vlastnost znát se je symetrická). Brzy zjistily, že v libovolné trojici existují alespoň 2, které se znají. Rozhodněte, zda pak existuje nutně trojice, v níž se všechny znají.

3. Úloha
V rovině je n bodů. Ukažte, že je lze obarvit 4 barvami tak, aby pro každý bod platilo, že všechny body, které od něho mají minimální vzdálenost, mají jinou barvu.

4. Úloha
Ve třídě je 40 lidí. Každý má nějakého ze sedmi koníčků. Žádný jich nemá více než 3. O každého z koníčků se zajímá alespoň 10 žáků. Ke každé trojici koníčků existuje člověk, který se zajímá právě o tyto tři koníčky. Dokažte, že existují dva koníčky, o něž se zajímají alespoň 4 stejní žáci.

5. Úloha
Dokažte, že ke každému přirozenému číslu k existuje jeho násobek, jehož desítkový zápis obsahuje nejvýše 4 různé číslice.

Řešení 2. série

1. ÚLOHA

Důkaz provedme matematickou indukci. Pro $n = 1$ je $1 = \frac{(1\cdot 3\cdot 1)}{3}$. Nechť tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Počítejme : $1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 + (2(n+1)-1)^2$ je podle indukčního předpokladu rovno $\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} + (2n+1)^2 = \frac{(2n+1)(n(2n-1)+3(2n+1))}{3} = \frac{(2n+1)(n+1)(2n+3)}{3} = \frac{(n+1)(2(n+1)+1)(2(n+1)-1)}{3}$. Což bylo dokázati.

2. ÚLOHA

Důkaz provedeme sporem. Nechť taková trojice neexistuje. Dívky si označíme $d_1, \ldots, d_6$. Určite existují 2 dívky, které se neznají. Nechť to jsou bez újmy na obecnosti (dále BÚNO) d_1 a d_2. Z trojic d_1, d_2, d_3; d_1, d_2, d_4; d_1, d_2, d_5; d_1, d_2, d_6 se vždy alespoň dvě musejí podle předpokladu znát. Máme dvě možnosti:

(1) Jedna z dívek d_1, d_2 zná tři ostatní. Nechť to jsou BÚNO d_3, d_4, d_5. Z nich se opět dle předpokladu musejí alespoň dvě znát. Tím vzniká trojice, v níž se všechny znají. SPOR

(2) Každá z dívek d_1, d_2 zná dvě jiné. Nechť je to BÚNO např. následovně: d_1 zná d_3 a d_4 a d_2 zná d_5 a d_6. Z trojice d_3, d_4, d_5 se opět dvě musejí znát. BÚNO d_3 a d_5 (d_3 a d_4 vede ke sporu). Z trojice d_3, d_4, d_6 se buď znají d_3, d_4 což je SPOR. Nebo d_3 a d_6 a nebo d_4 a d_6. Pak již libovolná (nutná) známost v trojici d_1, d_5, d_6 vede ke sporu.

3. ÚLOHA

Řešení provedeme opět indukcí. Pro $n = 1$ je vše jasné. Nechť tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Mějme $n+1$ bodů. Je jich konečně mnoho, a proto mezi nimi existuje minimální vzdálenost d. Vezměme nyní množinu M bodů takových, že nabývají od nějakého bodu vzdálenost d. Těmto bodům lze opsat kruh tak, že v něm všechny leží a alespoň jeden leží na jeho hranici. Tento bod má jistě (v M i v původní množině) maximálně tři nejbližší body. Ostatních n bodů lze obarvit dle indukčního předpokladu. Námi nalezený bod pak již jen obarvíme tak, aby měl jinou (čtvrtou) barvu než jeho tři nejbližší body.

4. ÚLOHA

Označme M množinu všech žáků a po řadě M_i, M_{ij}, M_{ijk} množinu těch, kteří se zajímají o i-tý, i-tý a j-tý, i-tý a j-tý a k-tý koníček. Podle principu inkluze a exluze je pak $|M| = \sum_{i=1}^{7} |M_i| - \sum_{i,j}^{7} |M_{ij}| + \sum_{ijk}^{7} |M_{ijk}|$. Tedy je $40 \geq 7 \cdot 10 - \sum_{i,j}^{7} |M_{ij}| + \binom{7}{3} \cdot 1$. Odtud $\sum_{i,j}^{7} |M_{ij}| \geq 65$. Jistě tedy existují i, j, že $|M_{ij}| \geq 4$.

5. ÚLOHA

Vezměme všechna $k+2$ ciferná čísla složená pouze z nul a jedniček. Těch je určitě alespoň $k+1$ a tedy mezi nimi existují dvě, že po dělení číslem k dávají stejný zbytek. Jejich rozdíl je tedy číslem k dělitelný. V jejich rozdílu se ale vyskytují pouze číslice 0, 1, 8, 9. Najdete lepší řešení?