6. série

Všehochuť

1. ÚLOHA

Zeměkoule je pro nás i nadále neprůhledná koule o poloměru $R = 6378$. Nad místem o zeměpisných souřadnicích (α_1, β_1) ve výšce h_1 je televizní vysílač. Jak vysoko musí být v místě o zeměpisných souřadnicích (α_2, β_2) anténa, abychom mohli signál přijímat? Zeměpisnými souřadnicemi se rozumí zeměpisná šířka a délka (v tomto pořadí).

2. ÚLOHA

V rovině je dána čtvercová síť. Uvažujme mnohoúhelník s vrcholy v mřížových bodech. Dokažte, že pro jeho obsah P platí $P = V + \frac{1}{2}S - 1$, kde V je počet mřížových bodů uvnitř mnohoúhelníka a S počet mřížových bodů na jeho hranici.

3. ÚLOHA

Dokažte, že pro každé přirozené $n > 1$ je

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right)\left(1 - \frac{1}{27}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) > \frac{1}{2}\,.$$

4. ÚLOHA

Dokažte, že rovnice

$$10^{10^{10}}x^2 + 11^{11^{11}}x - 9^{9^9} = 0$$

má dva různé reálné iracionální kořeny.

5. ÚLOHA

Označme a_n počet n-tic nul a jedniček takových, že se v nich nevyskytují tři nuly vedle sebe. Zjistěte, kolik je a_{13} a jaký dává a_{1993} zbytek při dělení třemi.

Řešení 6. série

1. ÚLOHA

Jak jste si jistě všimli, je označení zeměpisných souřadnic přesně opačné než u vzorových řešení první série. To je samozřejmě omyl. Chtěl jsem to udělat stejně ale nepovedlo se.

Označme V vysílač, A_0 průmět antény na povrch, S střed Země. Nejprve spočítáme úhel $\sphericalangle VSA_0$. Zavedeme kartézskou souřadnicovou soustavu s počátkem S tak, aby severní pól měl souřadnice $(0,0,R)$ a bod na rovníku se zeměpisnou délkou 0 měl souřadnice $(R,0,0)$. Bod V má souřadnice $((R+h_1)v_1, (R+h_1)v_2, (R+h_1)v_3)$ a bod A_0 (Ra_1, Ra_2, Ra_3), kde

$$\begin{aligned} v_1 &= \cos\beta_1\cos\alpha_1 & v_2 &= \sin\beta_1\cos\alpha_1 & v_3 &= \sin\alpha_1 \\ a_1 &= \cos\beta_2\cos\alpha_2 & a_2 &= \sin\beta_2\cos\alpha_2 & a_3 &= \sin\alpha_2\,. \end{aligned}$$

Úhel $\gamma = \sphericalangle VSA_0$ spočítáme ze skalárního součinu jako $(v_1a_1 + v_2a_2 + v_3a_3)$.

Omezme se na rovinu VSA_0. Řez povrchu Země touto rovinou je kružnice. Označme D dotykový bod tečny z V na tuto kružnici. Pak úhel $\delta = \sphericalangle VSD$ spočítáme jako $\arccos\frac{R}{R+h_1}$. Snadno nahlédneme, že

— pokud $\gamma \le \delta$, stačí anténa na povrchu;

— pokud $\gamma \ge \delta + \frac{\pi}{2}$, nemáme vůbec šanci.

Předpokládejme tedy $\delta < \gamma < \delta + \frac{\pi}{2}$. Pak $\sphericalangle DSA_0 = \gamma - \delta$ a snadno nahlédneme, že anténa musí být ve výšce

$$h_2 \ge \frac{R}{\cos\gamma - \delta} - R\,.$$

2. ÚLOHA

Lemma: (klíčové) *Buď dán trojúhelník s vrcholy v mřížových bodech, který kromě svých vrcholů žádné jiné mřížové body neobsahuje (uvnitř ani na hranici). Pak je jeho obsah $\frac{1}{2}$.*

Důkaz: Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že jeden z vrcholů má souřadnice $(0,0)$. Souřadnice ostatních dvou označme (a_1, a_2) a (b_1, b_2). Doplníme-li trojúhelník na rovnoběžník, ověřte si, že ani ten neobsahuje kromě svých vrcholů jiné mřížové body (proč?). Uvažujeme-li systém rovnoběžníků vzniklých z našeho posunutím o celočíselné násobky jeho stran, pokrývá nám rovinu (to platí pro každý rovnoběžník). Protože ten náš neobsahuje jiné mřížové body než své vrcholy, musí každý mřížový bod (m,n) být vrcholem nějakého z rovnoběžníku, tedy soustava

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= m \\ a_2x + b_2y &= n \end{aligned}$$

má pro každá m, n celočíselná řešení x, y. Tedy (viz. 4. úloha druhé série) $|a_1b_2 - a_2b_1| = 1$. Toto číslo však není ničím jiným než obsahem rovnoběžníku, tedy dvojnásobkem obsahu původního trojúhelníka.

Máme-li nyní mnohoúhelník bez vnitřních bodů, lze provést jeho triangulaci (rozdělení na trojúhelníky s vrcholy ve ve vrcholech mnohoúhelníka). Trojúhelníků je $n-2$, obsah je tedy $\frac{1}{2}(n-2) = \frac{1}{2}n-1$, což odpovídá. Dále lze postupovat indukcí podle počtu vnitřních bodů: pro $V = 0$ už vztah máme. Rozmyslete si, že jinak lze rozdělit mnohoúhelník na lomenou čarou, jejíž koncové i „zlomové“ body mají celočíselné souřadnice, na dva, jejichž počet vnitřních bodů už bude menší (takže na ně lze využít indukční předpoklad. Označme analogické počty pro ně V_1, S_1, V_2, S_2, c buď počet bodů na dělící čáře. Pak platí $V = V_1 + V_2 + c - 2$ (přibudou nové vnitřní body z bodů na čáře), $S = (S_1 - c) + (S_2 - c) + 2$. Dohromady

$$P = P_1 + P_2 = V_1 + \frac{1}{2}S_1 - 1 + V_2 + \frac{1}{2}S_2 - 1 =$$
$$= (V_1 + V_2 + c - 2) + \frac{1}{2}(S_1 + S_2 - 2c + 2) - 1 = V + \frac{1}{2}S - 1\,,$$

což jsme chtěli.

3. ÚLOHA

Pro $n \geq 2$ je $n^2 < n^3$, a tedy $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)$. Stačí tedy dokázat analogickou nerovnost, ve které se místo třetích mocnin vyskytují druhé. S využitím identity $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$ už dostáváme

$$\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)\,(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} > \frac{1}{2}\,.$$

Jiná možnost spočívá ve využití lemmatu ze vzorového řešení první úlohy třetí série a provedení nějakého podobného triku pro odhad vzniklého součtu. Naprosto nebylo třeba využívat integrálů, Taylorova rozvoje $\operatorname{arctg} x$, Lagrangeovy věty o střední hodnotě ani jiných neadekvátních prostředků.

4. ÚLOHA

Že má rovnice dva různé reálné kořeny, to se nejlépe pozná podle toho, že její diskriminant je kladný. Vzhledem k tomu, že diskriminant D je roven

$$D = \left(11^{11^{11}}\right)^2 + 4 \cdot 10^{10^{10}} \cdot 9^{9^9},$$

není o jeho nezápornosti jistě třeba pochybovat. Kořeny rovnice jsou čísla $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ a jelikož koeficienty jsou racionální čísla (dokonce celá), je každý z nich racionální právě tehdy, když $\sqrt{D}$ je racionální. Je-li $\sqrt{D} = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá čísla, je $D = \frac{p^2}{q^2}$. D je však celé číslo. Bylo by proto p^2 dělitelné q^2, a tedy i p by bylo dělitelné q. $\sqrt{D}$ by tedy muselo být dokonce celé číslo. Dokážeme-li nyní

$$\left(11^{11^{11}}\right)^2 < D < \left(11^{11^{11}} + 1\right)^2 ,$$

budeme hotovi, neboť to bude spor s tím, že by D bylo čtvercem celého čísla. Upravujme:

$$2 \cdot 10^{10} < 10 \cdot 10^{10} = 10^{11} < 11^{11}$$

$$11^{11^{11}} > 10^{10^{11}} > 10^{2 \cdot 10^{10}} = \left(10^{10^{10}}\right)^2 > 9^{10^{10}} \cdot 10^{10^{10}} > 9^{9^9+1} \cdot 10^{10^{10}} > 2 \cdot 9^{9^9} \cdot 10^{10^{10}} .$$

Získanou nerovnost vynásobíme dvěma, k většímu z čísel ještě přičteme jedničku, na obě strany „trošku“ přidáme a dostaneme, co potřebujeme:

$$\left(11^{11^{11}} + 1\right)^2 = \left(11^{11^{11}}\right)^2 + 2 \cdot 11^{11^{11}} + 1 > D .$$

Odhad D z druhé strany je zcela triviální.

5. ÚLOHA

Předpokládejme, že známe a_k pro $k = 1, \dots, n$ a chceme vědět, kolik je přípustných posloupností o délce $n+1$. Odřízneme-li z přípustné posloupnosti poslední číslo, dostaneme opět přípustnou posloupnost. Všechny tedy dostaneme tak, že k přípustné posloupnosti přidáme nulu nebo jedničku. Kdybychom ke každé mohli přidat obě, dostali bychom $2a_n$. Přidáním jedničky určitě posloupnost nezkazíme. Přidat nulu můžeme vždy kromě případu, kdy posloupnost končí $\dots 00$. Odříznutím posledních tří číslic dostaneme přípustnou posloupnost délky $n-3$ a naopak ke každé z přípustných posloupností délky $n-3$ lze přidat 100[1]. Počet případů, kdy nelze přidat nulu je tedy a_{n-3}. To znamená, že

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-3} . \qquad (1)$$

Snadno odhalíme, že $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 13$. Pomocí vztahu (1) lehko spočítáme dalších devět hodnot:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927	1705	3136

Označíme-li b_n posloupnost zbytků čísel a_n při dělení třemi, bude b_{n+1} rovno zbytku čísla $2b_n - b_{n-3}$ při dělení třemi. Z prvních čtyř hodnot (2, 1, 1, 1) snadno dopočítáme další:

[1] 000 přidat nelze, proto odřezáváme tři číslice

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
b_n	2	1	1	1	0	2	0	2	1	0	0	1	1	2	1	1	1

Protože $b_{14} = b_1$, $b_{15} = b_2$, $b_{16} = b_3$, $b_{17} = b_4$ a hodnota b_n je jednoznačně určena předchozími čtyřmi hodnotami, máme pro každé n přirozené $b_{n+13} = b_n$. A protože $1993 = 53 \cdot 13 + 4$, je $b_{1993} = b_4 = 1$.