2. série

Dělitelnost

1. Úloha

Nechť x_1 a x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $x^2+px-1=0$, kde p je liché číslo. Potom pro každé celé $n \geq 0$ jsou čísla $x_1^n + x_2^n$ a $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ celá a nesoudělná. Dokažte.

2. Úloha

Nalezněte všechna celočíselná řešení rovnice

$$x^4 + 4y^4 = 2\left(z^4 + 4u^4\right) .$$

3. Úloha

Nechť m a n jsou dvě navzájem různá přirozená čísla. Potom čísla

$$2^{2^m} + 1 \quad \text{a} \quad 2^{2^n} + 1$$

jsou nesoudělná. Dokažte.

4. Úloha

Nechť a, b, c a d jsou celá čísla taková, že soustava rovnic pro neznámé x a y

$$ax + by = m, \qquad cx + dy = n$$

má celočíselná řešení, kdykoliv m a n jsou celá čísla. Potom $ad - bc = \pm 1$. Dokažte.

5. Úloha

Dokažte, že pro každé n a pro libovolných n zadaných přirozených čísel existuje k $(1 \leq k \leq n)$ takové, že ze zadaných čísel lze vybrat k čísel tak, že součet vybraných čísel je dělitelný číslem n.

Řešení 2. série

1. ÚLOHA

Ze vztahu $x^2+px-1=0$ vyplývá $x^{n+2}+px^{n+1}-x^n=0$. Označíme-li tedy $a_n=x_1^n+x_2^n$, platí

$$\begin{aligned}a_{n+2}+pa_{n+1}-a_n &= \left(x_1^{n+2}+x_2^{n+2}\right)+p\left(x_1^{n+1}+x_2^{n+1}\right)-\left(x_1^n+x_2^n\right)=\\&=\left(x_1^{n+2}+px_1^{n+1}-x_1^n\right)+\left(x_2^{n+2}+px_2^{n+1}-x_2^n\right)=0\,.\end{aligned}$$

Máme tedy krásný rekurentní vztah pro a_n a je vidět, že tvrzení, že dva po sobě jdoucí členy posloupnosti jsou celé a nesoudělné, se bude nejlépe dokazovat indukcí. Pro $n=0$ tvrzení platí: $a_0=2$, $a_1=p$, p je liché, jde tedy o celá a nesoudělná čísla. Ze vztahu $a_{n+2}=a_n-pa_{n+1}$ snadno nahlédneme, že všechny členy posloupnosti jsou celá čísla. Druhou polovinu dokážeme sporem: nechť $d\mid a_n$, $d\mid a_{n+1}$, $d>1$. Pak ale $a_k=a_{k+2}+pa_{k+1}$ pro všechna $k\le n-1$, a indukcí tedy i $d\mid a_0$, $d\mid a_1$, což je spor s předpokladem $d>1$.

2. ÚLOHA

Snadno nahlédneme, že čtveřice $(0,0,0,0)$ je řešením. Kdyby existovalo jiné řešení (x,y,z,u), muselo by mezi všemi řešeními (netriviálními) existovat takové, pro které je hodnota $|x|+|y|+|z|+|u|$ nejmenší. Aspoň jedno z čísel x, y, z, u je nenulové. Pak ovšem levá i pravá strana jsou kladná čísla. Aspoň jedno z čísel x, y je tedy nenulové. Předpokládejme nejprve, že $x\neq 0$. Pravá strana je sudá, $4y^4$ je také sudé, je tedy sudé i x^4, a tedy i x. Položme $w=\frac{x}{2}$. Pak

$$\begin{aligned}(2w)^4+4y^4&=2(z^4+4u^4)\\z^4+4u^4&=2(y^4+4w^4)\,.\end{aligned}$$

Čísla z, u, y a w by tedy byla netriviální celočíselná řešení a $|z|+|u|+|y|+|w|<|x|+|y|+|z|+|u|$, což je spor s volbou x, y, z, u. Zbývá případ $x=0$. Pokud $z\neq 0$, dostaneme rovnost $2y^4=z^4+4u^4$, tedy analogicky z sudé. Položíme-li $w=\frac{z}{2}$, ověříme snadno, že $(y,0,u,w)$ je opět řešením s menším součtem absolutních hodnot než bylo původní, t.j. spor. Je-li i $z=0$, máme rovnost $y^4=2u^4$. Opět vidíme, že y je sudé, položíme $w=\frac{y}{2}$, a ke sporu stačí vzít řešení $(u,0,0,w)$.

3. ÚLOHA

Nejdříve jedno notoricky známé tvrzení: dává-li a při dělení m zbytek ±1, dává a^2 zbytek 1. Důkaz: máme $a=km\pm1$, tedy

$$a^2=(km\pm1)^2=k^2m^2\pm2km+1=m(k^2m\pm2k)+1\,.$$

Mějme bez újmy na obecnosti $n = m + k$, $k > 0$. Tvrzení pro dané m dokážeme indukcí podle k. Číslo 2^{2^m} má zbytek -1 při dělení $A = 2^{2^m} + 1$. Tedy jeho druhá mocnina $(2^{2^m})^2 = 2^{2^{m+1}}$ dává zbytek 1. Dává-li $2^{2^{m+l}}$ zbytek 1, dává zbytek 1 i jeho čtverec, to jest $2^{2^{m+l+1}}$. Indukcí tedy dostáváme, že $B = 2^{2^n} + 1$ dává při dělení A zbytek 2. Pro největší společný dělitel (A, B) čísel A, B tedy platí $(A, B) = (A, 2) = 1$. Poslední rovnost vyplývá z toho, že A je liché.

4. ÚLOHA

Odečteme-li od d-násobku první rovnice b-násobek druhé a naopak od a-násobku druhé c-násobek první, dostaneme soustavu

$$x(ad - bc) = md - nb$$
$$y(ad - bc) = na - mc$$

Víme, že soustava má celočíselné řešení pro libovolná m, n celá. Označme $D = ad - bc$. Snadno nahlédneme, že $D \neq 0$ (na to jste s oblibou zapomínali; rovněž jste s oblibou psali $x = \frac{md-nb}{ad-bc}$ aniž byste se zajímali, jestli $ad - bc = 0$). Znamená to tedy, že D dělí $md - nb$ pro každé m, n celé, dělí tedy i největší společný dělitel (d, b) čísel d, b. Obdobně D dělí i (c, a). Označíme-li největšího společného dělitele čísel a, b, c, d jako q, víme, že D dělí q a zároveň q^2 dělí $ad - bc = D$. Odtud q^2 dělí q, t.j. $|q| = 1$ a tedy i $|D| = 1$.

5. ÚLOHA

Označme si čísla $x_1, \ldots x_n$; dále označme součty $s_k = x_1 + \cdots + x_k$; $0 \leq k \leq n$ (prázdný součet $s_0 = 0$). Dostaneme tak $n + 1$ čísel; podle Dirichletova principu mezi nimi musí být l, m, $l > m$ tak, že s_l, s_m dávají po dělení n stejný zbytek. Pak ovšem $k = l - m$ a čísla x_{m+1}, x_{m+2}, $\ldots$, x_l jsou hledanými čísly.