1. série
Geografická

1. ÚLOHA
Ve výšce h ($h > 0$) nad místem o zeměpisné délce α ($\alpha \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$) a zeměpisné šířce β ($\beta \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$) je umístěn stacionární televizní satelit. Popište formou nerovností zeměpisné souřadnice míst na povrchu Zeměkoule, ze kterých je satelit vidět.
(Pozn.: Předpokládáme, že Zeměkoule je neprůhledná!)

2. ÚLOHA
(*pokračování předchozí úlohy*) Předpokládejme, že jsme na místě o zeměpisných souřadnicích γ a δ a že je z něj satelit z 1.úlohy viditelný. Jak je nutno zaměřit satelitní anténu, aby směřovala na satelit? Zadejte azimut a odchylku od vodorovné roviny přímky, spojující anténu a satelit.

3. ÚLOHA
Severní magnetický pól bohužel nesplývá se severním zeměpisným pólem. Při použití kompasu k určení severu se tedy dopouštíme určité chyby, která závisí na našich zeměpisných souřadnicích ϕ a ψ a také na souřadnicích severního magnetického pólu θ a σ. Nalezněte tuto závislost!

4. ÚLOHA
V příručkách pro mladé táborníky lze nalézt následující metodu k určení severu: malou ručičku hodin, jejichž ciferník je ve vodorovné rovině, namíříme na slunce, pak přímka půlící úhel mezi malou ručičkou a dvanáctkou má směr sever–jih. Ani tato metoda není zcela bez chyby: předpokládejme, že je 21. března, tj. slunce je nad rovníkem. Pro pozorovatele na rovníku je ovšem slunce celé dopoledne na východě a celé odpoledne na západě a k určování severu touto metodou se zřejmě příliš nehodí. Předpokládejme, že jsme 21. března v T hodin ($T \in \langle 0, 24 \rangle$) na místě o zeměpisných souřadnicích χ a ζ, že máme na hodinkách místní čas, že je slunce již nad obzorem a že jsme použili zmíněnou metodu. Jaké jsme se dopustili chyby?

5. ÚLOHA
(*pokračování předchozí úlohy*) Jaké musí být T, aby bylo slunce nad obzorem?

Ve kterých z těchto úloh potřebujeme znát vzdálenost Slunce od Země?

Řešení 1. série

1. ÚLOHA

Někteří (a nebylo jich málo) se pokusili si úlohu zjednodušit předpokladem, že stacionární televizní satelit musí být umístěn nad rovníkem, a to dokonce v jednoznačně určené vzdálenosti h. To jim samozřejmě nemohlo projít. My v semináři neřešíme praktickou fyzikální úlohu, ale její *matematický model*; t.j. úlohu, ve které se nevyskytují pojmy jako satelit, Země, světelný paprsek, ale bod, koule, přímka. Nakolik odpovídá námi nalezené řešení skutečnosti, to je otázka z úplně jiné oblasti a v našem semináři se jí nezabýváme. V zadání byla poloha satelitu jednoznačně uvedena jako obecná, a proto je problém třeba takto i řešit.

S buď střed Země, D bod, v němž je umístěn satelit. Zavedeme kartézskou soustavu souřadnic se středem ve středu Země tak, že severní pól a bod o zeměpisných souřadnicích $(0,0)$ mají po řadě souřadnice $(0,0,R)$ a $(R,0,0)$. Pak bodu, visícímu nad bodem o zeměpisných souřadnicích (α,β) ve vzdálenosti r od S přiřadíme souřadnice $(r\cos\alpha\cos\beta, r\sin\alpha\cos\beta, r\sin\beta)$. Mějme bod C o zeměpisných souřadnicích (γ,δ). Satelit je vidět právě tehdy, když $\sphericalangle SCD$ je tupý (nebo pravý). To je ale právě tehdy, když $\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{CD}\leq 0$. To je ale (protože $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$) ekvivalentní s podmínkami

$$\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{CD}\geq 0 \iff \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SD}\geq\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SC} \iff \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SD}\geq R^2.$$

Teď už stačí dosadit $\overrightarrow{SC}=(Rc_1,Rc_2,Rc_3)$, $\overrightarrow{SD}=(rd_1,rd_2,rd_3)$, kde $r=R+h$ a

$$\begin{array}{lll} c_1=\cos\gamma\cos\delta & c_2=\sin\gamma\cos\delta & c_3=\sin\delta \\ d_1=\cos\alpha\cos\beta & d_2=\sin\alpha\cos\beta & d_3=\sin\beta \end{array}$$

Dostaneme tak nerovnost

$$c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3\geq\frac{R}{R+h}\,,$$

která je řešením úlohy.

2. ÚLOHA

Zjištění odchylky nedá příliš mnoho práce. Odchylka je o pravý úhel menší než $\sphericalangle SCD$, takže při značení z úlohy 1 dostáváme

$$\cos\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{CD}}{\|C\|\,S\cdot\|C\|\,D}$$

$$\psi=-\arcsin\frac{c_1(rd_1-Rc_1)+c_2(rd_2-Rc_2)+c_3(rd_3-Rc_3)}{\sqrt{(rd_1-Rc_1)^2+(rd_2-Rc_2)^2+(rd_3-Rc_3)^2}}\,.$$

Azimut nastavení je zjevně stejný jako azimut bodu E, což je průmět bodu D na zemský povrch (průsečík SD s povrchem Země). Máme $\overrightarrow{SE} = (Rd_1, Rd_2, Rd_3)$. Vektor kolmý k rovině, určené vektory x, y je např. $x \times y$ (nebo jeho libovolný násobek). Označíme-li $\mathbf{n}_1 = \frac{1}{R^2}\overrightarrow{SC} \times \overrightarrow{SP}$ (P je severní pól) a $\mathbf{n}_2 = \frac{1}{R^2}\overrightarrow{SC} \times \overrightarrow{SE}$, je odchylka rovin CSP a CSD rovna

$$\arccos \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \cdot \|\mathbf{n}_2\|}\,.$$

Dosazením tedy dostáváme

$$\tau = \arccos \frac{c_2(c_2d_3 - c_3d_2) - c_1(c_3d_1 - c_1d_3)}{\sqrt{(c_2d_3 - c_3d_2)^2 + (c_3d_1 - c_1d_3)^2 + (c_1d_2 - c_2d_1)^2}\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\,.$$

Azimut je roven buď τ pro $\alpha \geq \gamma$ nebo $2\pi - \tau$ pro $\alpha \leq \gamma$. Je třeba si ale uvědomit, že jsou dva případy, kdy naše odvození nebylo korektní:

(1) $C = E$, t.j. satelit máme přímo nad hlavou
(2) $C = P$, t.j. stojíme na pólu

V obou případech ale o azimutu nastavení nemá smysl vůbec mluvit.
Pozn. Námi získané vzorce je možno samozřejmě ještě zjednodušit: např v tom posledním si stačí uvědomit, že $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = |\cos\delta|$.

3. Úloha

Chybu zřejmě dostaneme jako odchylku τ z úlohy 2, kde ve vzorcích budeme místo α, β, γ, δ psát θ, σ, ϕ, ψ (v tomto pořadí).

4. Úloha

Předem dvě důležité (bohužel) poznámky:

(1) místní čas znamená takový čas, že ve 12 hodin je slunce přesně na jihu (tedy ne pásmový)
(2) Otázka byla formulována trochu nešťastně (ale při troše dobré vůle se dalo pochopit, co jsme měli na mysli). Jestliže jsme se ptali na chybu, měli jsme na mysli velikost odchylky námi určeného „severu“ a toho skutečného; samozřejmě ne úvahu, proč je metoda špatná.

Nejdříve vyjádříme odchylku směru slunce od jižního směru. Slunce můžeme považovat za satelit z úlohy 1. Odchylka je určitě $\pi - \tau$, kde τ je odchylka z úlohy 2, přičemž místo α, β, γ, δ dosazujeme μ, 0, χ, ζ, kde $\mu = \chi + \frac{\pi}{12}(12 - T)$ je zeměpisná délka místa, kde je slunce v zenitu. My svůj jih určíme tak, že se k tomu skutečnému posuneme o $\frac{\pi}{12}|T - 12|$ (polovina úhlu mezi malou ručičkou a dvanáctkou). Tedy chyba je $\nu = \left|\pi - \tau - \frac{\pi}{12}|T - 12|\right|$, a protože jsme určovali ne jih ale přímku sever–jih, vezmeme menší z čísel ν, $\pi - \nu$.

5. Úloha

Nejdříve odpověď na otázku v poznámce za zadáním: k úloze 5 vzdálenost Země od Slunce znát **potřebujeme**, k úloze 4 (jak už jste jistě postřehli) nikoli, a k ostatním už vůbec ne. Většina řešitelů si úlohu zjednodušila „posunutím Slunce do nekonečna“. Tím by se ovšem úloha stala triviální. Drtivá většina ostatních zase spočítala trvání dne pouze na rovníku. Zůstaly dvě světlé výjimky, a ty zase udělaly spoustu numerických chyb.

Lemma. *Mějme bod S, z něhož vycházejí polopřímky SA, SB, SC tak, že roviny SAC a SBC jsou kolmé. Označíme-li přirozeným způsobem úhly mezi polopřímkami $\alpha = \sphericalangle BSC$, $\beta = \sphericalangle CSA$, $\gamma = \sphericalangle ASB$, platí*

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta\,.$$

Poznámka: Toto lemma (mírně jinak formulované) se někdy nazývá Pythagorova věta ve sférické trigonometrii.

Důkaz: Značení: $\overline{SA_1}$ rozumím buď $|SA_1|$ nebo číslo opačné podle toho, jestli A_1 leží na polopřímce SA nebo na polopřímce k ní opačné (analogicky ostatní „vzdálenosti“). Označme A_1 bod polopřímky SA ve vzdálenosti 1 od S. Bodem A_1 veďme rovinu kolmou k SB; její průsečíky s SB, SC označme B_1, C_1. Pak je $\triangle SB_1A_1$ pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu B_1. Je tedy $\overline{SB_1} = \overline{SA_1}\cos\gamma = \cos\gamma$. Na druhou stranu ale A_1C_1 je průsečnicí roviny kolmé na SB_1 a roviny kolmé na SC_1, je tedy kolmá na rovinu SB_1C_1 Úhel $\sphericalangle SC_1A_1$ je tedy pravý, a tedy $\overline{SC_1} = \cos\beta$. Úhel $\sphericalangle SB_1C_1$ je však také pravý, a tedy $\overline{SB_1} = \cos\beta\cos\alpha$. Máme tak dvojí vyjádření $\overline{SB_1}$, a z toho dostáváme požadovaný vztah. Speciální případy si prodiskutujte sami. $\square$

Označme C polohu pozorovatele, Z bod, kde je slunce v zenitu, a E bod na rovníku, který má stejnou zeměpisnou délku jako C. Pomocí lemmatu pak dostáváme $\cos\sphericalangle ZSC = \cos(\mu-\chi)\cos\zeta$. Uděláme-li řez rovinou ZSC, uvidíme, že slunce je nad obzorem právě tehdy, když $\sphericalangle ZSC$ je menší nebo roven meznímu úhlu $\omega = \sphericalangle ZSQ$, kde Q je dotykový bod tečny ze Slunce k Zemi. Snadno spočítáme $\cos\omega = \frac{R}{d}$ (kde d je vzdálenost Země od Slunce). Celkově tedy dostáváme, že slunce je nad obzorem právě tehdy, když

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}(12-T)\right)\cos\zeta \geq \frac{R}{d}$$

$$|12-T| \leq T_0 = \frac{12}{\pi}\arccos\frac{R}{d\cos\zeta}$$

(při úpravách se využije toho, že $\cos x$ je na $\langle 0,\pi\rangle$ klesající). První nerovnost může být splněna vůbec pro nějaké T (a druhá má smysl) jen pokud $|\zeta| \leq \omega$. Na místech se zeměpisnou šířkou větší než ω tedy slunce nevyjde vůbec a jinak bude nad obzorem pro $T \in \langle 12-T_0, 12+T_0\rangle$.