4. série

Stereometrie

1. ÚLOHA

Jaká je největší možná plocha kolmého průmětu pravidelného čtyřstěnu do roviny ?

2. ÚLOHA

Jaká je nejmenší možná plocha kolmého průmětu hexaedru (to je krychle) do roviny ?

3. ÚLOHA

Jistě si dokážete představit, že když položím pravidelný dvanáctistěn na stůl, pak jeho kolmým průmětem do roviny stolu bude desetiúhelník. Deset je ale moc. Jaké je nejmenší n takové, že lze tento dvanáctistěn umístit do prostoru tak, aby jeho průmět na desku stolu byl n-úhelník ?

4. ÚLOHA

Na každé hraně daného čtyřstěnu jsou vyznačeny tři body, které ji dělí na čtvrtiny. Veďme těmito body všechny možné řezy rovnoběžné se stěnami čtyřstěnu. Na kolik částí se čtyřstěn rozpadne ? A jakpak budou vlastně vypadat — budou to samé čtyřstěny ?

5. ÚLOHA

Roviny proložené stěnami čtyřstěnu (ne nutně pravidelného) dělí prostor na patnáct částí (viz 1. série). Do kolika z nich lze vepsat kouli, která se dotýká všech čtyřech rovin ? (Přesněji: pro která k přirozená existuje takový čtyřstěn, že do k z patnácti částí prostoru lze kouli vepsati, zatímco do $15 - k$ ostatních ji vepsati nemožno.)

Řešení 4. série

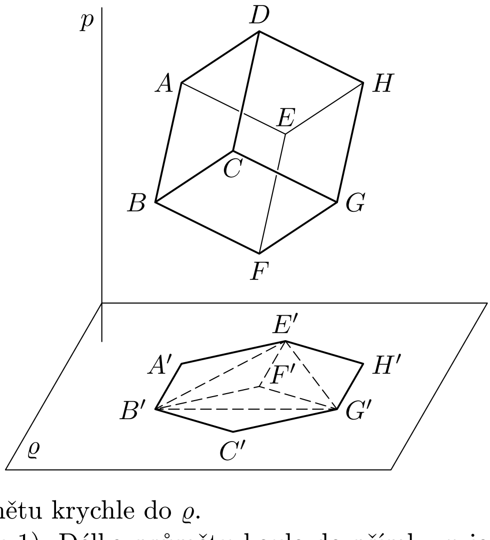
1. ÚLOHA

Označme hranu čtyřstěnu a. Průmětem čtyřstěnu může být trojúhelník nebo čtyřúhelník. Je-li průmětem čtyřúhelník, je jeho plocha $\frac{1}{2}u_1u_2\sin\varphi$, kde u_1, u_2 jsou délky průmětů úhlopříček a φ jest úhel sevřený těmito průměty. Jistě je $u_1 \le a$, $u_2 \le a$ a $\sin\varphi \le 1$. Ve všech těchto nerovnostech nastane zároveň rovnost, právě když jsou dvě protilehlé hrany rovnoběžné s průmětnou. Obsah průmětu je v tomto případě roven $\frac{1}{2}a^2$, což jest tedy maximální hodnota mezi plochami čtyřúhelníkových průmětů.

Nemožno ovšem pominouti trojúhelníkové průměty. Ty však nemohou mít větší plochu, než je plocha původní stěny, která je $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \le \frac{1}{2}a^2$, tedy trojúhelníky nemohou vítězi mezi čtyřúhelníky konkurovat. Obsah největšího kolmého průmětu je tedy $\frac{1}{2}a^2$.

2. ÚLOHA

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že daná krychle je jednotková; označme ji $ABCDEFGH$. Rovinu, do níž promítáme, označme ϱ; nechť p je libovolná přímka, která je na ni kolmá.



Nejdříve dokážeme, že plocha průmětu krychle do roviny ϱ je číselně rovna délce průmětu krychle do přímky p. Stačí uvažovat o obecném případu, kdy průmětem je šestiúhelník. Nechť je jím $A'B'C'G'H'E'$ a nechť body F' a D' jsou uvnitř průmětu. Pro obsah P průmětu krychle platí $P = 2\cdot S'$, kde S' je obsah trojúhelníka $B'E'G'$, což je průmět rovnostranného trojúhelníka o straně $\sqrt{2}$ a ploše $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Označíme-li α úhel rovin ϱ a BEG, je $S' = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha$, odtud $P = \sqrt{3}\cdot\cos\alpha$. Průmětem krychle do přímky p je vlastně průmět úsečky FD. Jelikož FD je kolmá na rovinu BEG, rovná se odchylka přímek FD a p odchylce rovin BEG a ϱ, což je α. Proto je délka průmětu FD do p rovna $|FD|\cdot\cos\alpha = \sqrt{3}\cdot\cos\alpha$, což jest rovno průmětu krychle do ϱ.

Nyní vepišme do krychle kouli (o průměru 1). Délka průmětu koule do přímky p je rovna jedné — nezávisle na otočení krychle. Délka průmětu krychle je tedy větší nebo rovna jedné. Přesně jedna to bude v případě, že ϱ je rovnoběžná s některou ze stěn krychle. Tedy nejmenší možná plocha průmětu krychle je 1.

Výsledek $\sqrt{3}\cdot\cos\alpha$ z důkazu tvrzení se hodí pro určení největšího možného obsahu. Ten bude roven $\sqrt{3}$ a to v případě $\alpha = 0$, neboli $BEG \parallel \varrho$.

3. ÚLOHA

Každý si jednoduše představí, že průmětem může být šestiúhelník. Jelikož dvanáctistěn je těleso středově souměrné, musí i průmět být středově souměrný a tedy n sudé. V úvahu již přichází jen $n = 4$. Pak ovšem úhel u alespoň jednoho vrcholu průmětu je menší nebo roven $\frac{\pi}{2}$. Tento vrchol je obrazem nějakého vrcholu dvanáctistěnu a jeho okolí. Protože hrany svírají tupé úhly, musí být obrazem okolí vrcholu tupý úhel. Tedy $n = 6$.

4. ÚLOHA

Každému bodu prostoru lze přiřadit čtveřici reálných čísel, jejichž součet je 4. Jsou to orientované poměry vzdáleností od stěn čtyřstěnu a čtvrtin příslušných výšek. Pro bod čtyřstěnu jsou tyto souřadnice nezáporné. Stačí si uvědomit,že objem čtyřstěnu $ABCD$ je roven součtu objemů čtyřstěnů $ABCX$, $ABXD$, $AXCD$, $XBCD$, je-li X bod čtyřstěnu. Každá z dělících rovin má rovnici $x_i = n$, kde $n = 1, 2, 3$. Body $\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$ a $\langle y_1, y_2, y_3, y_4\rangle$ leží ve vnitřku stejné části právě tehdy, když žádná ze souřadnic těchto bodů není celočíselná a $\langle [x_1], [x_2], [x_3], [x_4]\rangle = \langle [y_1], [y_2], [y_3], [y_4]\rangle$. Částí je tedy právě tolik, kolik je čtveřic celých nezáporných čísel o součtu 1, 2, 3. Ty jsou:

tvar	počet
$\langle 1;0;0;0\rangle$	4
$\langle 1;1;0;0\rangle$	6
$\langle 2;0;0;0\rangle$	4
$\langle 3;0;0;0\rangle$	4
$\langle 2;1;0;0\rangle$	12
$\langle 1;1;1;0\rangle$	4

každý řádek odpovídá skupině, jejíž prvky se liší pouze pořadím. Částí je tedy 34.

Představme si nyní rovinu, která prochází středy tří hran, jež vycházejí z téhož vrcholu. Ta dělí čtyřstěn na dvě části, z nichž ta menší má tvar čtyřstěnu. Lehko si uvědomíme, že až se rozpadne celý velký čtyřstěn na oněch 34 částí, náš malý čtyřstěn se rozpadne na 5 částí, z nichž čtyři jsou čtyřstěny („rohy“) a poslední je osmistěn.

5. ÚLOHA

Existují čtyři typy oblastí:

a) čtyřstěn
b) 4 trojhrany příslušné jednotlivým vrcholům
c) 4 oblasti, mající jako část své hranice stěnu čtyřstěnu
d) 6 oblastí, majících jako část své hranice hranu čtyřstěnu

Oblastem typu b) požadovanou kouli jistě vepsat nelze. Oblastem typu a) lze vždy vepsat kouli a z ní snadno stejnolehlostí vytvoříme příslušné koule i v oblastech typu c).

Zkoumejme nyní oblasti typu d). Mějme hranu AB a různoběžné roviny ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, přičemž $\{A\} = \varrho_1 \cap \varrho_2 \cap \varrho_3$ a $\{B\} = \varrho_1 \cap \varrho_2 \cap \varrho_4$. Označme ϱ_{12}, ϱ_{34}, osy dvojic rovin ϱ_1, ϱ_2 a ϱ_3, ϱ_4. Střed případné koule musí ležet na průsečnici rovin ϱ_{12}, ϱ_{34}. Ta protíná úsečku AB v bodě P a CD v bodě Q. Označíme-li S střed koule, jež by byla vepsána do této oblasti, a φ_{12}, φ_{34} poloviny odchylek příslušných rovin, je $|PS| = \frac{r}{\sin\varphi_{12}}$, $|QS| = \frac{r}{\sin\varphi_{34}}$.

Protože víme, že $|PQ| = |QS| - |PS|$, snadno vypočteme, že $r = \dfrac{|PQ|}{\frac{1}{\sin\varphi_{34}} - \frac{1}{\sin\varphi_{12}}}$. Proto taková koule existuje právě tehdy, když $\varphi_{12} > \varphi_{34}$. Ze dvojice protilehlých oblastí typu d) tedy může být koule nejvýše v jedné; v žádné z nich není, právě když $\varphi_{12} = \varphi_{34}$. Je tedy $5 \leqq k \leqq 8$. Ještě zbývá ukázat, že všechny tyto hodnoty jsou možné.

Pro pravidelný čtyřstěn je $k = 5$.

Pro čtyřstěn o vrcholech [1;0;0], $[-1;0;0]$, [0;1;0], [0;0;1] je $k = 6$.

Nechť trojúhelník ABC je rovnostranný a bod D leží na kolmici k rovině ABC procházející bodem A tak, aby odchylka rovin ABC a BCD byla $\frac{\pi}{3}$. Pak je $k = 7$.

Pro čtyřstěn o vrcholech [0;0;0], [1;0;0], [0;1;0], [0;0;1] je $k = 8$.