3. série
Diskrétní úlohy

1. ÚLOHA
Jistá organizace má n členů a $n+1$ tříčlenných komisí, z nichž každé dvě mají různé složení. Dokažte, že existují dvě komise, které mají společného právě jednoho člena.

2. ÚLOHA
Mezi každými dvěma městy v jistém kraji je právě jeden druh spojení: autobusové, vlakové nebo letecké. Všechny tři druhy spojení jsou v tomto kraji použity, avšak žadné město nepoužívá všechny tři a žádná tři města nejsou vzajemně propojena týmž druhem spojení. Určete maximální počet měst v tomto kraji.

3. ÚLOHA
Každá množina z konečného systému A podmnožin reálné přímky je sjednocením dvou uzavřených intervalů. Navíc každé tři množiny z A mají neprázdný průnik. Dokažte, že existuje bod, který patří alespoň do poloviny množin z A.

4. ÚLOHA
Nechť M je množina n bodů, kde $n \geq 2$. Nechť H je neprázdný podsystém 2^n podmnožin M uzavřený na sjednocení a doplněk (jsou-li A, B v H, pak také $A \cup B$ je v H a $M - A$ je v H). Kolik prvků může mít množina H ? Dokažte.

5. ÚLOHA
Máte dřevěný kvádr $m \times n \times r$ cm (m, n, r jsou přirozená čísla). Obarvěte veškerý povrch kvádru, ten pak rozřežete na krychličky $1 \times 1 \times 1$ cm, načež zjistíte, že přesně polovina krychliček je netknutá barvou. Dokažte, že počet různých kvádrů (o různých rozměrech), které mají tuto vlastnost je konečný.

Řešení 3. série

1. ÚLOHA

Tvrzení dokážeme indukcí. Především vidíme, že předpoklad nemůže být splněn pro $n < 5$, to znamená, že tvrzení platí. Nechť nyní $n \geq 5$ a pro všechna $n' < n$ je již tvrzení dokázáno. A předpokládejme, že máme organizaci s n členy a $n+1$ různými komisemi, avšak žádné dvě komise buď nemají společného žádného člena nebo mají společné právě dva členy.

Protože se každá z $n+1$ komisí sestává ze tří osob, v komisích je celkem $3n+3$ míst. Kdyby každý byl nejvýše v třech komisích, pak by bylo obsazeno nejvýše $3n$ míst. Někdo je tedy členem alespoň čtyř komisí. Řekněme, že A je členem komisí $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_4$. Nechť $\mathcal{K}_1$ má členy A, B, C. Z našeho předpokladu plyne, že každé dvě komise, které mají společného člena A, mají navíc společného ještě jednoho člena. Tudíž do každé z komisí $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_4$ patří také B či C. Můžeme tedy předpokládat, že komise $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_4$ mají následující složení:

$$\mathcal{K}_1 : A, B, C \quad \mathcal{K}_2 : A, B, D \quad \mathcal{K}_3 : A, B, E \quad \mathcal{K}_4 : A, \ldots$$

Komise $\mathcal{K}_4$ však musí sdílet dva členy s každou z komisí $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$, tedy i ona nutně má za člena B. Symetricky, každá další komise, která má za člena B, musí mít taktéž za člena A.

Nechť $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_k$ jsou všechny komise mající za členy A i B. To je k komisí, jejichž členy je dohromady $k+2$ osob. Zbývajících $m = n - k - 2$ slouží v $n + 1 - k = m + 3$ komisích $\mathcal{K}_{k+1}, \ldots, \mathcal{K}_{n+1}$, z nichž žádná nemá za člena někoho, kdo by sloužil v prvních k komisích. Protože $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_k$ nevyčerpávají všechny komise, je $m \geq 3$. Uvážíme-li některých $m+1$ zbývajících komisí, pak podle indukčního předpokladu existují dvě, které mají společného právě jednoho člena, což je spor.

Dokázali jsme tedy, že dané tvrzení platí i pro dané n.

2. ÚLOHA

Ukážeme, že maximální počet jsou čtyři. Ten je dosažen, jestliže města A, B jsou spojena vlakem, C, D autobusem a všechny ostatní spoje jsou letecké.

Nejprve ukažme, že žádné město nemůže být spojeno s třemi ostatními stejným druhem spojení. Řekněme, že A je spojeno s městy B, C, D vlakem. Města B, C, D pak ale mezi sebou nemohou použít vlakové spojení a nemohou také používat pouze letecké nebo pouze autobusové spojení. Z toho však plyne, že jedno z nich používá všechny tři druhy spojení, což je spor. Každé město tedy používá daný druh spojení nejvýše do dvou měst, navíc používá nejvýše dva druhy spojení. Tudíž počet měst je nejvýš pět.

Předpokládejme nyní, že měst je právě pět, najdeme-li spor, jsme hotovi. Nechť tedy A je spojeno s B, C způsobem M_1 a s D, E způsobem M_2. Protože C používá M_1, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že C je spojeno s D taktéž pomocí M_1.

Neboť spojení mezi D a E nemůže být typu M_2, musí být typu M_1. Spojení mezi C a E pak musí být M_2. Pokračujeme-li takto dále, dojdeme k závěru, že druh spojení M_3 vůbec není použit, což je spor.

3. ÚLOHA

Nechť systém $\mathcal{A}$ sestává z množin $F_1, \dots, F_n$. Každá množina F_i může být vyjádřena jako $F_i = [a_i, b_i] \cup [c_i, d_i]$, kde $a_i \le b_i \le c_i \le d_i$. Nechť $a = \max\{a_i; i = 1, \dots, n\}$ a $d = \min\{d_i; i = 1, \dots, n\}$, $a = a_j$ pro jisté $j \in \{1, \dots, n\}$ a $d = d_k$ pro jisté $k \in \{1, \dots, n\}$. Dokažme, že do každé množiny F_i patří a nebo d. Nechť tomu tak není, tedy jisté F_i neobsahuje ani a, ani d. Protože $a_i \le a = a_j$, je nutně $F_j \cap [a_i, b_i] = \emptyset$. Protože $d_i \ge d = d_k$, je $F_k \cap [c_i, d_i] = \emptyset$. Z toho ale plyne, že $F_i \cap F_j \cap F_k = \emptyset$, což je spor.

Dokázali jsme tedy, že buď a patří alespoň do poloviny množin ze systému $\mathcal{A}$ anebo d patří alespoň do poloviny množin z $\mathcal{A}$.

4. ÚLOHA

Nejprve poznamenejme, že je-li $A, B \in H$, pak i $A \cap B = M - ((M - A) \cup (M - B)) \in H$. Tedy H je také uzavřen na operaci průniku.

Protože systém H je neprázdný, obsahuje alespoň jednu množinu A. Pak ale také $(M - A) \in H$ a tedy i $M = A \cup (M - A) \in H$ a $\emptyset = M - M \in H$.

Pro každé $x \in M$ uvažujme množinu B_x, která je průnikem všech $A \in H$ obsahujících x. Protože H je konečný systém množin uzavřený na průniky, je i $B_x \in H$. Navíc $x \in B_x$ a pro každou $A \in H$ je buď $A \cap B_x = B_x$ nebo $A \cap B_x = \emptyset$. Nechť $x_1, \dots, x_p$ jsou takové, že $B_{x_1}, \dots, B_{x_p}$ tvoří disjunktní rozklad množiny M, tj. $B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_p} = M$ a $B_{x_i} \cap B_{x_j} = \emptyset$ pro $i \ne j$. Pro každý podsystém tohoto rozkladu $B_{x_{i_1}}, \dots, B_{x_{i_k}}$ je zřejmě $B_{x_{i_1}} \cup \dots \cup B_{x_{i_k}} \in H$.

Na druhou stranu nechť $C \in H$, potom $C = C \cap (B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_p}) = (C \cap B_{x_1}) \cup \dots \cup (C \cap B_{x_p})$ a pro každé i je buď $C \cap B_{x_i} = B_{x_i}$ nebo $C \cap B_{x_i} = \emptyset$. Tedy C je opět tvaru $C = B_{x_{i_1}} \cup \dots \cup B_{x_{i_k}}$, přičemž toto vyjádření je jednoznačné. Z toho plyne, že počet množin v H je roven počtu podmnožin množiny $\{1, \dots, p\}$, což je 2^p.

Naopak pro každé 2^i $(i = 1, \dots, n)$ dokážeme zřejmě najít systém H daných vlastností sestávající z 2^i množin.

5. ÚLOHA

Neobarvené krychličky původně tvořily blok o rozměrech $(m-2) \times (n-2) \times (r-2)$. To, že přesně polovina krychliček je neobarvených je tedy vyjádřeno rovnicí $m \cdot n \cdot r = 2(m-2)(n-2)(r-2)$, kterou můžeme psát ve tvaru

$$(*) \qquad \frac{1}{2} = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{r-2}{r}.$$

Předpokládejme, že $m \le n \le r$. Potom

$$\left(\frac{m-2}{m}\right)^3 \le \frac{1}{2} \le \frac{m-2}{m}.$$

Tedy $\frac{1}{2} \leq \frac{m-2}{m} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, což dává odhad $4 < m < 10$.

Je zde tedy pouze konečně možností pro nejmenší rozměr m. Pro pevné m můžeme původní rovnost přepsat do tvaru

$$\frac{m}{2(m-2)} = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{r-2}{r}$$

a podobně jako v předchozím případě dostáváme, že

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \leq \frac{m}{2(m-2)} \leq \frac{n-2}{n}$$

tedy $\frac{m}{2(m-2)} \leq \frac{n-2}{n} \leq \sqrt{\frac{m}{2(m-2)}} < 1$. Pro pevné m přichází v úvahu tedy pouze konečně možností pro n. Nakonec pro dané m, n existuje zjevně nejvýš jedno r splňující rovnost $(*)$.

Ukázali jsme, že existuje pouze konečně trojic (m, n, r) přirozených čísel splňujících $(*)$ takových, že $m \leq n \leq r$. Přeházením pořadí se však počet trojic zvýší nejvýše šestkrát.