2. série
Funkcionální rovnice

Funkcionální rovnice je rovnice, v níž hledaná neznámá je funkce. Řešit funkcionální rovnici znamená najít všechny funkce zadaných vlastností tak, aby pro všechny možné hodnoty z definičního oboru byla rovnost splněna.

Příklad: Řešte funkcionální rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

za podmínky, že $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá.
Uvažujme nejprve tuto rovnici pouze na kladné poloose, tj. $x, y \in \mathbb{R}^+$. Dosaďme do (1) $y = x$. Dostaneme

$$f(2x) = 2f(x).$$

Dále položme do (1) $y = 2x$. Díky předchozímu vztahu obdržíme

$$f(3x) = f(x + 2x) = f(x) + f(2x) = 3f(x).$$

Indukcí snadno odvodíme vztah

$$f(nx) = nf(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^+). \tag{2}$$

Zvolme nyní libovolně $x \in \mathbb{R}^+$ a $m, n \in \mathbb{N}$ a položme $t = \frac{m}{n} \cdot x$. Protože $nt = mx$, máme $f(nt) = f(mx)$. Užitím (2) dostáváme $nf(t) = mf(x)$, čili $f(t) = \frac{m}{n} \cdot f(x)$, ale $t = \frac{m}{n} \cdot x$, tedy

$$f\left(\frac{m}{n} \cdot x\right) = \frac{m}{n} \cdot f(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall m, n \in \mathbb{N}).$$

Dosazením $x = y = 0$ do (1) obdržíme $f(0) = f(0) + f(0)$, tedy $f(0) = 0$.
Hledejme nyní řešení na celém $\mathbb{R}$. Dosazením $y = -x$ dostaneme z (1) $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$, tedy $f(-x) = -f(x)$. Tedy pro libovolné řešení f vztahu (1) platí

$$f(rx) = rf(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q}).$$

Položme $f(1) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Pak dosazením $x = 1$ do předchozího vztahu vyjde

$$f(r) = cr \qquad (\forall r \in \mathbb{Q}). \tag{3}$$

Dosazením do (1) zjistíme, že každá funkce tvaru (3) by byla řešením, kdybychom hledali $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Pro každé reálné číslo x existuje posloupnost racionálních čísel r_n, taková, že $\lim r_n = x$. Pak ovšem použitím (3) a spojitosti funkce f máme

$$f(x) = f(\lim r_n) = \lim f(r_n) = \lim(r_n \cdot c) = c \cdot \lim r_n = cx.$$

Tedy každé spojité řešení (1) musí mít tvar $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$.
Dosazením do (1) lehko ověříme, že fce uvedeneho tvaru je řešením $\forall c \in \mathbb{R}$.
Vztah (1) se obvykle nazývá Cauchyova rovnice.

Poznámka: Existují i nespojitá řešení Cauchyovy rovnice.

Pokud nejste seznámeni s pojmem spojitost, nenechte se znechutit. Pokuste se alespoň najít nějaká řešení zadaných rovnic. **Každý bodík je dobrý.**

Při řešení úloh můžete používat řešení příkladu.

1. Úloha
Řešte funkcionální rovnici

$$f(0) \cdot xy + f(1) \cdot x^2 + f(y) - f(x-y) - 2y\sqrt{f(x)} = 0,$$

pro $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Úloha
Najděte všechny f, g, h spojité, aby platilo

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad f(x+y) = g(x) + h(y),$$

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

3. Úloha
Řešte funkcionální rovnici

$$f(x+y) - 20x^3 y f(\sqrt[5]{y}) + f(y) + f(x-y) = 2x^5 + y^5 + 10xy^4, \quad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

4. Úloha
Najděte všechny polynomy $p(x)$ s reálnými koeficienty tak, aby

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad x \cdot \big(p(x+2) - p(x)\big) - 3\big(3p(x+2) - p(x)\big) = 0.$$

5. Úloha
Najděte všechny funkce f spojité, takové, že

$$f(x+y) - x^2 f(y) - y^2 f(x) - f(x)f(y) = xy(xy-2) - x^2 - y^2, \quad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Řešení 2. série

1. ÚLOHA
Dosaďme $x = 1$, $y = 0$. Máme

$$0 + f(1) + f(0) - f(1) - 0 = 0,$$

čili

$$f(0) = 0.$$

Nyní položme pouze $y = 0$ a označme $f(1)$ jako c.

$$cx^2 - f(x) = 0,$$

tj.

$$f(x) = cx^2.$$

Dosazením do původního vztahu máme:

$$cx^2 + cy^2 - cx^2 + 2cxy - cy^2 - 2y\sqrt{cx^2} = 0,$$

což je

$$y \cdot \left(cx - \sqrt{cx^2}\right) = 0,$$

tedy musí být $c = 0$. (Ono totiž $\sqrt{x^2} = |x|$, tedy pro záporná x je $\sqrt{x^2} \neq x$ — tuto chybu udělalo 26 z 45 řešitelů!)

Jediným řešením je $\underline{\underline{f(x) = 0}}$. (Lehko ověříme, že je to vskutku řešení.)

2. ÚLOHA
Položme $y = 0$ a $h(0) = a$. Má tedy platit:

$$f(x) = g(x) + a.$$

Dále pro $x = 0$ a $g(x) = b$ obdržíme:

$$f(y) = h(y) + b.$$

Po dosazení:

$$f(x + y) = f(x) - a + f(y) - b.$$

Substitucí $f(x) = \varphi(x) + a + b$ dostaneme Cauchyho rovnici

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

jejímž řešením je $\varphi(x) = cx$, kde c je libovolné reálné číslo. Pak nutně

$$\begin{aligned} f(x) =& cx + a + b, \\ g(x) =& cx + b, \\ h(x) =& cx + a. \end{aligned}$$

Dosazením ověříme, že tyto funkce vyhovují pro libovolná reálná čísla a, b, c.

3. ÚLOHA

Pro $x = 0$, $y = 0$ obdržíme

$$3f(0) = 0,$$

tedy

$$f(0) = 0.$$

Nechť $y = 0$. Potom dostaneme

$$2f(x) = 2x^5.$$

Tedy vyhovovat může jedině funkce $\underline{\underline{f(x) = x^5}}$. Dosazením ověříme, že tato funkce opravdu splňuje zadanou rovnici:

$$(x+y)^5 - 20x^3y^2 + y^5 + (x-y)^5 = 2x^5 + y^5 + 10xy^4.$$

4. ÚLOHA

Nechť $p(x)$ je řešením úlohy. Každý polynom lze rozložit na kořenové činitele, tedy lze psát

$$p(x) = a \cdot (x - b_1) \cdot (x - b_2) \cdot \ldots \cdot (x - b_n),$$

kde a je reálné a b_1, b_2, …, b_n komplexní čísla.

Původní rovnici upravíme na tvar

$$(x-9) \cdot p(x+2) = (x-3) \cdot p(x)$$

a po dosazení pro $a \neq 0$ obdržíme:

$$(x-9) \cdot \big(x - (b_1 - 2)\big) \cdot \ldots \cdot \big(x - (b_n - 2)\big) = (x+3) \cdot (x - b_1) \cdot \ldots \cdot (x - b_n).$$

Tato rovnost ovšem platí, právě když jsou soubory[1]

$$9, b_1 - 2, \ldots, b_n \quad \text{a} \quad 3, b_1, \ldots, b_n$$

shodné. Tedy musí platit i rovnost součtů

$$b_1 + \cdots + b_n - 2n + 9 = 3 + b_1 + \cdots + b_n,$$

[1]Soubor je jako množina, ale prvky se mohou opakovat.

čili musí být $n = 3$.

Jedná se tedy o soubory

$$9, b_1 - 2, b_2 - 2, b_3 - 2 \quad \text{a} \quad 3, b_1, b_2, b_3.$$

Jelikož se na levé straně vyskytuje číslo 9, musí se objevit i napravo. Tedy bez újmy na obecnosti lze předpokládat $b_1 = 9$; pak $b_1 - 2 = 7$ a číslo 7 se musí vyskytnout i napravo. Tedy lze klidně předpokládat, že $b_2 = 7$. Podobně zjistíme, že $b_3 = 5$.

Pro $a = 0$ je situace jasná, tudíž každý student bleskově odhalí, že řešením jsou právě všechny polynomy tvaru

$$a \cdot (x-9)(x-7)(x-5),$$

kde a je libovolné reálné číslo.

5. ÚLOHA

Funkcionální rovnici ze zadání lze upravit takto:

$$f(x+y) + (x+y)^2 - \big(f(x) - x^2\big)\big(f(y) - y^2\big) = 0.$$

Nyní vezměme substituci $f(x) = g(x) - x^2$. Dostaneme funkcionální rovnici

$$g(x+y) = g(x) \cdot g(y), \tag{1}$$

která je ekvivalentní s rovnicí ze zadání. Pokud existuje x_1 takové, že $g(x_1) = 0$, platí

$$g(x) = g(x - x_1 + x_1) = g(x_1) \cdot g(x - x_1) = 0,$$

čili

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = 0.$$

Jinak je

$$g(x) = g\big(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}\big) = \Big(g\big(\tfrac{x}{2}\big)\Big)^2 > 0.$$

Tedy lze (1) psát ekvivalentně jako

$$\ln g(x+y) = \ln g(x) + \ln g(y),$$

což je vlastně Cauchyho rovnice. Má-li být funkce f spojitá, musí být spojitá i funkce g, a tedy také funkce $\ln g$. Tudíž nás zajímají pouze spojitá řešení poslední rovnice, která, jak je nám známo z Příkladu, mají tvar $\ln g(x) = cx$, kde c je libovolné reálné číslo. Pak $g(x) = e^{cx}$.

Dosazením lehko ověříme, že v obou případech je funkce g řešením rovnice (1).

Odtud bryskně usoudíme, že zadaná rovnice má právě tato řešení:

$$f(x) = -x^2$$

a

$$f(x) = e^{cx} - x^2,$$

kde c je libovolné reálné číslo.