1. série

Řezání a krájení

Řekneme, že n přímek v rovině je v obecné poloze, pokud se každé dvě přímky protínají právě v jednom bodě (tj. žádné dvě nejou rovnoběžné a žádné dvě nesplývají) a pokud se žádné tři neprotínají v jednom bodě.
Řekneme, že n rovin v prostoru je v obecné poloze, pokud se každé dvě protínají právě v jedné přímce (tj. žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné dvě nesplývají), každé tři se protínají právě v jednom bodě (tj. průsečík dvou rovin je přímka, která není rovnoběžná s žádnou ze zbylých rovin) a žádné čtyři roviny nemají společný bod.

1. ÚLOHA
Na kolik částí rozdělí rovinu n přímek v obecné poloze?

2. ÚLOHA
Na kolik částí rozdělí prostor n rovin v obecné poloze?

3. ÚLOHA
Nechť n rovin v prostoru prochází daným bodem. Pokuste se definovat pojem *obecná poloha pro n rovin v prostoru, které procházejí daným bodem* a zjistěte, na kolik částí rozdělí tyto roviny prostor.

4. ÚLOHA
Na sféře je dáno n hlavních kružnic, z nichž každé dvě se protínají právě ve dvou bodech a žádné tři nemají společný bod. Na kolik částí rozdělí tyto kružnice sféru?

5. ÚLOHA
Nechť je dán trojúhelník ABC. Jistě existuje přímka, která prochází tímto trojúhelníkem a dělí jeho obvod na dvě stejně dlouhé části. Dokonce si můžeme předepsat směr, a pak existuje přímka mající výše uvedenou vlastnost a daný směr. Provedeme-li toto pro dva různé směry, dostaneme dvě různé přímky, každá z nich dělí obvod ABC na dvě stejně dlouhé části a tyto přímky se protínají uvnitř trojúhelníka ABC. Existuje uvnitř trojúhelníka ABC bod, kterým procházejí tři přímky s touto vlastností? Jak takový bod nalézti?

Nápověda: Zkoumejte vzájemnou souvislost prvních čtyř úloh.

Řešení 1. série

1. úloha

Nejprve si vzpomeňme, co je to — n přímek v obecné poloze:

(i) Každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě.

(ii) Žádné tři přímky se neprotínají v jednom bodě.

Mějme tedy v rovině n přímek v obecné poloze. Označme si $a_1(n)$ počet částí, na které dělí rovinu. Přidám-li k těmto přímkám další přímku p (tak, aby těchto $n+1$ přímek bylo v obecné poloze), pak p protne původní přímky v n bodech, které rozdělí přímku p na $a_0(n)$ částí. Každá část přímky p dělí nějakou původní část roviny na dvě nové části. Tedy počet částí se zvětší o $a_0(n)$.

$$(\forall n) \quad a_1(n+1) = a_1(n) + a_0(n).$$

Dále víme, že $a_1(0) = 1$ (jedna nerozdělená rovina).

A proto:

$$\begin{aligned} a_1(n) &= a_1(n-1) + a_0(n-1) = a_1(n-2) + a_0(n-2) + a_0(n-1) = \dots \\ &= a_1(0) + \sum_{i=0}^{n-1} a_0(i) = 1 + \sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}\,. \end{aligned}$$

2. úloha

Uvědomme si, co je to — n rovin v obecné poloze:

(i) Každé tři roviny se protínají v právě jednom bodě.

(ii) Žádné čtyři roviny se neprotínají v jednom bodě.

Označme si tedy $a_2(n)$ počet částí, na které je prostor rozdělen n rovinami v obecné poloze. Přidám-li k těmto rovinám další (označme si ji ϱ) tak, aby stále byly všechny v obecné poloze, pak se ϱ protne s ostatními rovinami v n přímkách. Bystrý student bez větších obtíží rychle nahlédne, že *těchto n přímek leží v obecné poloze* (ale *opravdu* si to *rozmyslete*). Proto těchto n přímek rozdělí rovinu ϱ na $a_1(n)$ částí. Každá část roviny ϱ dělí nějakou původní část prostoru na dvě nové části. Tedy počet částí prostoru se zvětší o $a_1(n)$.

$$(\forall n) \quad a_2(n+1) = a_2(n) + a_1(n).$$

Dále víme, že $a_2(0) = 1$ (jeden nerozdělený prostor).

A proto:[1]

$$a_2(n) = a_2(n-1) + a_1(n-1) = a_2(n-2) + a_1(n-2) + a_1(n-1) = \dots$$

$$\dots = a_2(0) + \sum_{i=0}^{n-1} a_1(i) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2+i+2}{2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 2\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + 2n\right) = 1 + n + \frac{2n^3 - 3n^2 + n + 3n^2 - 3n}{12} =$$

$$= \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1$$

3. ÚLOHA

Představme si n rovin procházejících bodem A v obecné poloze. Představme si navíc ještě sféru se středem v bodě A. Těchto n rovin protíná sféru v n hlavních kružnicích, které jsou v obecné poloze (*dokažte si sami!*). Ty dělí sféru na $s_1(n)$ částí. Ale každá část prostoru vytíná právě jednu část na sféře. Proto je prostor rozdělen na $s_1(n)$ (tj. $n^2 - n + 2$ pro $n > 0$ a 1 pro $n = 0$) částí.

4. ÚLOHA

Označme $s_0(n)$ počet částí, na které dělí kružnici n různých bodů. Lehko zjistíme, že $s_0(0) = 1$ a pro libovolné $m > 0$ platí $s_0(m) = m$.

Mějme tedy oněch n hlavních kružnic na sféře. Označme si $s_1(n)$ počet částí, na které sféru dělí. Přidám-li k těmto kružnicím další hlavní kružnici k (tak, aby těchto $n+1$ kružnic bylo v obecné poloze), pak k protne původní kružnice v $2n$ bodech, které rozdělí kružnici k na $s_0(2n)$ částí. Každá část kružnice k dělí nějakou původní část sféry na dvě nové části. Proto se počet částí sféry zvětší o $s_0(2n)$, což lze zapsat takto:

$$(\forall n) \quad s_1(n+1) = s_1(n) + s_0(2n).$$

Dále víme, že $s_1(0) = 1$ (celá sféra). A tudíž platí pro všechna n kladná:

$$s_1(n) = s_1(n-1) + s_0(2(n-1)) = s_1(n-2) + s_0(2(n-2)) + s_0(2(n-1)) = \dots$$

$$\dots = s_1(0) + s_0(0) + \sum_{i=1}^{n-1} s_0(2i) = 1 + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} i = n^2 - n + 2\,.$$

Ještě jednou podotýkám, že $s_1(0) = 1 \neq 0^2 - 0 + 2$.

jiné řešení: Chápejme situaci na kouli jako nákres grafu. Tento graf má $v(n) = 2 \cdot \binom{n}{2} = = n(n-1)$ vrcholů a $h(n) = \dfrac{4 \cdot v(n)}{2} = 2n(n-1)$ hran. Podle Eulerovy věty pro neprázdné rovinné grafy bez izolovaných vrcholů platí pro libovolné $n > 0$

$$s_1(n) + v(n) = h(n) + 2\,,$$

[1] A co v k-rozměrném prostoru? *Marcela Hlawiczková* nám napsala, že pro $k \geq -1$, $n \geq 0$ platí $a_k(n) = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{n}{j}$. Je to vůbec pravda?

čili

$$s_1(n) = n(n-1) + 2\,.$$

A ještě jednou — pro $n = 0$ to neplatí! Je však vidět, že

$$s_1(0) = 1\,.$$

5. ÚLOHA *(podle Juraje Slamičky)*
Označme K', L', M' body dotyku kružnice vepsané danému trojúhelníku a stran BC, CA, AB. Jistě platí $|AL'| = |AM'|$; označme tuto délku a. Podobně označme $b = |BK'| = |BM'|$, $c = |CK'| = |CL'|$. Nyní sestrojme bod K jako obraz bodu K' ve středové souměrnosti podle středu úsečky BC; podobně sestrojme body L, M. Pak jistě

$$|BM| = |CL| = a\,,$$

$$|CK| = |AM| = b\,,$$

$$|AL| = |BK| = c\,.$$

Odtud lehko odvodíme, že každá z přímek AK, BL, CM dělí obvod trojúhelníku ABC na dvě stejně dlouhé části.

Cevova věta. *Jsou-li K, L, M (po řadě) body uvnitř stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC, pak se úsečky AK, BL, CM protnou v jednom bodě, právě když platí*

$$\frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CL|}{|AL|} \cdot \frac{|AM|}{|BM|} = 1\,.$$

Důkaz lze nalézt např. ve scriptu *Leo Boček: Základy planimetrie,* nebo v knize *Švrček–Vanžura: Geometrie trojúhelníka.* Můžete se také pokusit si to dokázat sami.

V našem případě platí

$$\frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CL|}{|AL|} \cdot \frac{|AM|}{|BM|} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1\,.$$

Proto se úsečky AK, BL, CM protnou v jednom bodě.

Tedy hledaný bod existuje; nalezneme jej jako průsečík úseček AK, BL, kde body K, L zkonstruujeme výše popsaným způsobem.

Jiné řešení nám poslala *Zuzana Honzíková:* *Nechť P, Q, R jsou středy stran trojúhelníku ABC. Pak osy vnitřních úhlů trojúhelníku PQR půlí obvod trojúhelníku ABC a protínají se v jednom bodě uvnitř trojúhelníku ABC. Důkaz není těžký, ale je pěkný* — opravdu si ho udělejte!