8. série

Všehochuť

1. ÚLOHA

Na kružnici je umístěno $3k$ bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{3k}$, které kružnici dělí na $3k$ oblouků, přičemž k oblouků má délku 1, k oblouků má délku 2 a konečně k oblouků má délku 3. Dokažte, že existují indexy i a j tak, že vzdálenost bodů A_i a A_j je $\frac{60k}{\pi}$.

2. ÚLOHA

Nalezněte celočíselná řešení rovnice

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x}}}}}_{1991-\text{krát}} = y\,.$$

3. ÚLOHA

Lze obarvit políčka šachovnice o rozměrech $m \times n$ černou a bílou barvou tak, aby:

(1) počet bílých políček se rovnal počtu černých políček,

(2) každý sloupec i každý řádek byl *skorojednobarevný*? (Sloupec resp. řádek se nazývá *skorojednobarevný*, obsahuje-li více než $\dfrac{3}{4}$ políček téže barvy.)

4. ÚLOHA

Množina $\mathcal{A}$ má n prvků. Určete největší možný počet tříprvkových podmnožin množiny $\mathcal{A}$, které lze vybrat tak, aby každé dvě z nich měly jednoprvkový průnik.

5. ÚLOHA

V předminulém ročníku našeho semináře byl následující příklad: Rozřežte krychli o hraně 3 minimálním počtem řezů na jednotkové krychličky, přičemž je dovoleno rozřezané části klást na sebe. V tomto případě byl minimální počet řezů 6: Snadno totiž nahlédnete, že 5 řezů nestačí, neboť vnitřní krychlička musí být odříznuta tolikrát kolik má stěn a šesti řezy to dokáže i malé dítě. Tuto úlohu snadno zobecníte na krychli o hraně $n \geq 3$. Učiňte tak a úlohu vyřešte.[1]

[1] Štěpáne K., jak se budou jmenovat všechny vnitřní krychličky?

Řešení 8. série

1. ÚLOHA

Předpokládejme, že tvrzení neplatí. Konce všech $3k$ oblouků obarvíme černou barvou. Celou kružnici rozdělíme na oblouky délky 1 a nové body dělení obarvíme červeně. Vezměme nějaký oblouk AC délky 2. Jeho střed B' je obarven červeně. Středově symetrický bodu B' je bod B, který je obarven černě (uvědomte si proč). Oblouk AB má délku $3k-1$ a leží v něm n_1 oblouků délky 1, n_2 oblouků délky 2 a n_3 oblouků délky 3. V oblouku CB leží n_3 oblouků délky 1 a n_1 oblouků délky 3, neboť body středově symetrické k černým koncům oblouku délky 1 jsou červené a leží tudíž v oblouku délky 3. Proto $n_3 = k - n_1$. Dosadíme-li odtud do rovnosti $3k-1 = n_1 + 2n_2 + 3n_3$, dostaneme $2n_1 - 1 = 2n_2$, což je kýžený spor.

2. ÚLOHA

Nechť x a y jsou celočíselná řešení dané rovnice. Pak po mnoha umocněních dostáváme, že $m = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ a $k = \sqrt{x}$ jsou celá čísla. Pokud $k > 0$, potom $m^2 = k^2 + k = k(k+1)$ a $k < m < k+1$, neboli m není celé číslo. Nutně tedy $k = 0$ a rovnice má jedině triviální řešení $x = y = 0$.

3. ÚLOHA

Nelze. Důkaz provedeme sporem. Nechť takové obarvení existuje. Označme r počet skorobílých sloupců, s počet skoročerných sloupců, p počet skorobílých řádků a q počet skoročerných řádků. Zřejmě $p+q = m$ a $r+s = n$. Můžeme předpokládat, že $p \leq \frac{m}{2} \leq q$. Políčko nazveme špatným, pokud má jinou barvu než většina políček ve stejném sloupci, nebo pokud má jinou barvu než většina políček ve stejném řádku. V průsečíku skoročerného řádku se skorobílým sloupcem je jistě špatné políčko, podobně i v průsečíku skorobílého řádku se skoročerným sloupcem. Všech špatných políček je méně než $\frac{mn}{4} + \frac{mn}{4} = \frac{mn}{2}$. Z předchozí úvahy dostáváme $ps + rq < \frac{mn}{2}$. Odtud plyne, že $r \leq s$ a bílých políček je méně než

$$pr + \frac{qn}{4} + \frac{sm}{4} = \frac{mn}{2} + pr - \frac{np}{4} - \frac{mr}{4} = \frac{mn}{2} - \frac{p}{2}\left(\frac{n}{2} - r\right) - \frac{r}{2}\left(\frac{m}{2} - p\right) \leq \frac{mn}{2},$$

což je spor.

4. ÚLOHA

Hledaný počet označme k_n Rozeberme tři možnosti

(1) Žádný prvek množiny $\mathcal{A}$ není prvkem více než dvou množin hledaného systému. Nechť jedna z tříprvkových množin je $\{a; b; c\}$. Ostatní množiny mají s touto množinou jednoprvkový průnik, ale každý z prvků a, b a c se smí vyskytovat již jen v jedné množině, tedy $k_n \leq 1 + 3 = 4$

(2) Existuje prvek množiny $\mathcal{A}$, který je obsažen ve třech množinách, ale žádný prvek není obsažen ve více než třech množinách. Podobnou úvahou jako v předchozím dostáváme, že $k_n \leq 1 + 3 \times 2 = 7$.

(3) Existuje prvek $a \in \mathcal{A}$, který je obsažen nejméně ve čtyřech tříprvkových množinách. Pak jsou všechny ostatní prvky těchto tříprvkových množin navzájem různé a každá ze zbylých tříprvkových množin musí také obsahovat prvek a (jinak by takováto množina musela obsahovat po jednom prvku z každé z oněch čtyř (přesněji nejméně čtyř) množin a obsahova by alespoň čtyři prvky). Prvek a tedy leží ve všech tříprvkových množinách a odtud dostáváme $1 + 2k_n \leq n$, neboli $k_n \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]$.[2]

Snadno nahlédneme, že $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k_4 = 1$ a $k_5 = 2$. Nechť $n = 6$. Pak zřejmě nastává případ (1) (proč?), a tedy $k_6 \leq 4$. Na druhé straně snadno sestrojíme příklad ({a;b;c}; {c;d;e};{e;f;a};{b;d;f}), ze kterého plyne, že $k_6 = 4$. Nechť $n \in \{7; 8; \ldots; 16\}$. Pokud nastane případ (3), pak $k_n \leq 7$, v případech (1) a (2) jistě také $k_n \leq 7$. Příklad nám však ukazuje, že $k_7 = 7$ ({a;b;c}; {c;d;e};{e;f;a};{b;d;f};{a;g;d};{b;g;e}; {c;g;f}). Posloupnost k_n je jistě neklesající, tedy $k_n = 7$ pro $n = 7, 8, \ldots, 16$. Konečně, je-li $n \geq 17$, pak máme ve všech případech přinejmenším odhad $k_n \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]$, ale tento odhad je přesný, jak ukazuje následující konstrukce: jeden prvek je společný všem tříprvkovým množinám a ostatní prvky (kromě jednoho v případě sudého n) jsou rozděleny do dvojic a s vybraným prvkem tvoří žádané tříprvkové množiny.

5. ÚLOHA

Úlohu vyřešíme pro kvádr o stranách a, b a c. Definujme čísla n_a, n_b a n_c vztahy

$$2^{n_a - 1} < a \leq 2^{n_a}, \qquad 2^{n_b - 1} < b \leq 2^{n_b}, \qquad 2^{n_c - 1} < c \leq 2^{n_c}.$$

Nyní ukážeme, že minimální počet řezů je $n_a + n_b + n_c$.

(1) Tento počet řezů je dostatečný:
Stačí se zabývat případem, kdy $a = 2^{n_a}$, $b = 2^{n_b}$ a $c = 2^{n_c}$. Podaří-li se nám tento kvádr rozřezat daným počtem řezů, jistě rozřežeme i každý menší. Postup je velmi snadný, po prvním řezu získáme dva shodné kvádry o hranách $\frac{a}{2}$, b a c. Dáme je na sebe a druhým řezem dostaneme čtyři shodné kvádry o hranách $\frac{a}{4}$, b a c. Tímto postupem dostaneme po n_a řezech a kvádrů o rozměrech $1 \times b \times c$. Srovnejme je nyní opět do tvaru původního kvádru a opakujme celý postup vzhledem k hraně délky b a nakonec vzhledem k hraně délky c.

(2) Menší počet řezů nestačí:
Toto tvrzení dokážeme indukcí vzhledem k $n = a + b + c$. Nechť $a + b + c = 4$, pak jde o kvádr $2 \times 1 \times 1$, $n_a + n_b + n_c = 1 + 0 + 0$ a opravdu, jeden řez stačí, nula řezů nestačí. Pokud $a + b + c = 5$, pak jde o kvádr $2 \times 2 \times 1$, $n_a + n_b + n_c = 1 + 1 + 0$, nebo jde o kvádr $3 \times 1 \times 1$ a $n_a + n_b + n_c = 2 + 0 + 0$. Zde dva řezy stačí,

[2] [A] značí jako obvykle celou část čísla A

ale jeden ne. Předpokládejme nyní, že $n > 5$ a že tvrzení platí pro všechna $m < n$. Sporem dokážeme, že platí i pro n. Nechť existuje kvádr o rozměrech $a \times b \times c$, $a + b + c = n$, který lze rozřezat menším počtem řezů než $n_a + n_b + n_c$. Řežme tedy. Po prvém řezu dostaneme dva kvádry. Každý z nich lze rozřezat na jednotkové krychličky menším počtem řezů než $n_a + n_b + n_c - 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsme řezali hranu a, a tedy jeden z kvádrů bude mít rozměry $\overline{a} \times b \times c$, kde $\overline{a} \geq \frac{a}{2}$. Pak ovšem $n_{\overline{a}} \geq n_a - 1$. Tento kvádr nelze podle indukčního předpokladu rozřezat méně než $n_{\overline{a}} + n_b + n_c$ řezy, ale $n_{\overline{a}} + n_b + n_c \geq n_a + n_b + n_c - 1$, a to je spor.

Z postupu je názorně vidět, že bylo výhodné řešit obecnější úlohu, což je dosti častá situace.