7. série

Úlohy o pokrytí

1. Úloha

V rovině je tisíc úhlů, přičemž součet jejich velikostí je menší než 2π. Je možné tyto úhly rozmístit v rovině tak, aby ji celou pokrývaly?

2. Úloha

Na kruhovém stole o poloměru R leží bez překrývání n mincí o poloměru r. Přitom žádnou další minci nelze na stůl položit. Dokažte

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right) < \sqrt{n} < \frac{R}{r}.$$

3. Úloha

Dokažte, že libovolných n bodů v rovině lze pokrýt konečným počtem kruhů tak, že součet průměrů všech těchto kruhů je menší než n a vzdálenost mezi každými dvěma kruhy je větší než 1.

4. Úloha

Je dán čtverec 30×30. Lze jej pokrýt 100 čtverci 2×2 a 125 obdélníky 4×1?

5. Úloha

Rozřežme čtverec na ostroúhlé trojúhelníky. Dokažte, že jich musí být vždy aspoň osm.

Řešení 7. série

1. ÚLOHA

Není to možné. Pokud bychom vrcholy všech úhlů umístili do jednoho bodu S, pak zřejmě dané úhly nepokrývají žádnou kružnici se středem S. Uvažujme jiné rozmístění daných úhlů. Potom existuje kružnice se středem S a poloměrem r tak, že vrcholy všech úhlů leží uvnitř této kružnice. Sestrojme novou kružnici k se středem S a poloměrem R takovým, že $\frac{r}{R}$ je „velice malé“. Potom se úhlová velikost oblouku, který na kružnici k vytíná každý z úhlů, bude jen „velice málo“ lišit od velikosti tohoto úhlu. Proto při dostatečně velkém R bude součet úhlových velikostí vyťatých oblouků menší než 2π a na kružnici k budou existovat body, které neleží v žádném úhlu.

K tomu, aby byl důkaz naprosto korektní je potřeba pro dané $\varepsilon > 0$ a dané $r > 0$ najít R tak, aby bylo splněno následující tvrzení: Úhel o velikosti α s vrcholem ve vzdálenosti menší než r od středu S kružnice k o poloměru R vytíná na této kružnici oblouk, jehož úhlová velikost je menší než $\alpha + \varepsilon$.

2. ÚLOHA

Plocha stolu je větší než plocha pokrytá mincemi. Proto $n\pi r^2 < \pi R^2$ a odtud

$$\sqrt{n} < \frac{R}{r}.$$

Zvětšíme-li poloměr všech mincí o r, pak tyto zvětšené mince beze zbytku pokrývají stůl, jehož poloměr je zmenšený o r. Kdyby existoval na zmenšeném stole bod, který by nebyl pokryt zvětšenými mincemi, pak bychom mohli na stůl položit další minci (její střed by byl v tomto bodě). Proto součet ploch zvětšených mincí je větší než plocha zmenšeného stolu, tj. $\pi(R-r)^2 < 4nr^2$. Odtud

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r} - 1\right) < \sqrt{n}.$$

3. ÚLOHA

Vezměme nějaké $a > 0$ a sestrojme kruhy o poloměru a se středy v zadaných bodech. Vezměme nějakou dvojici (pokud nějaká taková dvojice existuje) protínajících se kruhů a nahraďme je jedním kruhem, který pokrývá oba tyto kruhy a jehož poloměr není větší než součet poloměrů původních kruhů. Toto opakujme tak dlouho, až dostaneme $m \leq n$ navzájem disjunktních kruhů, které obsahují dané body a původní kruhy o poloměru a. Součet jejich poloměrů je nejvýše na. Zmenšeme nyní poloměr těchto kruhů o číslo b, $0 < b < a$. Zmenšené kruhy budou pokrývat zadané body (proč?), součet jejich poloměrů bude nejvýše

$$2na - 2mb \leq 2na - 2b$$

a vzdálenosti mezi nimi budou větší než $2b$. Nyní stačí vybrat čísla $a > b > 0$ tak, aby $2na - 2b < n$ a $2b > 1$. Těmto nerovnostem vyhovuje např.

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\,, \qquad b = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\,.$$

4. ÚLOHA

Obsah čtverce 30×30 je stejný jako součet obsahů 100 čtverců 2×2 a 125 obdélníků 4×1. Pomocí rovnoběžek se stranami rozdělme čtverec 30×30 na 900 čtverců o straně 1. Existuje-li požadované pokrytí, pak každý pokrývající pravoúhelník pokrývá právě čtyři z těchto jednotkových čtverců a žádné dva pokrývající pravoúhelníky se nepřekrývají ve vnitřních bodech. Z 900 jednotkových čtverců obarvíme nyní právě ty, které leží současně v sudých sloupcích a sudých řádcích. Obarvených čtverců je potom 225. Každý obdélník 4×1 pokrývající 4 jednotkové čtverce pokrývá právě 2 obarvené čtverce nebo nepokrývá žádný obarvený čtverec. Každý čtverec 2×2 pokrývající 4 jednotkové čtverce pokrývá právě jeden obarvený čtverec. Tedy 100 čtverců 2×2 a 125 obdélníků 4×1, které se navzájem nepřekrývají, může pokrývat pouze **sudý** počet obarvených čtverců. Tedy nemohou pokrývat útvar, ve kterém je lichý počet obarvených čtverců.

5. ÚLOHA

Uvažujme čtverec $ABCD$ rozřezaný na ostroúhlé trojúhelníky. Aspoň jeden z vrcholů těchto trojúhelníků leží uvnitř čtverce. (Rozmyslete si, že jinak by jeden z trojúhelníků byl pravoúhlý.) Z vrcholů trojúhelníků, které leží uvnitř čtverce, vybereme ty, které leží nejblíže ke straně AB, a z nich ten, který leží nejblíže ke straně DA, označíme M. Analogicky N je vrchol některého z trojúhelníků, který leží uvnitř čtverce a ze všech vrcholů nejbližších k CD je nejblíž BC. Z toho, jak jsme body M a N definovali, plyne: leží-li M nebo N v některém trojúhelníku, pak je jeho vrcholem. Protože M a N jsou vrcholy ostroúhlých trojúhelníků, musí každý z nich ležet aspoň v pěti trojúhelnících. Pokud $M \neq N$, mohou být dva z těchto trojúhelníků společné pro oba body, tedy trojúhelníků je alespoň 8. Případ $M = N$ nemůže nastat. Pak by totiž všechny ostatní vrcholy trojúhelníků ležely na hranici čtverce a alespoň jeden z trojúhelníků by byl pravoúhlý nebo tupoúhlý. (Rozmyslete si, proč!) Na 8 ostroúhlých trojúhelníků můžeme čtverec rozřezat např. takto: