4. série

Stereometrie

1. ÚLOHA
Existuje konvexní devítistěn, jehož všechny stěny jsou čtyřúhelníky?

2. ÚLOHA
Vyšetřete, pro jaké trojúhelníky ABC existuje čtyřstěn, jehož všechny stěny jsou shodné s trojúhelníkem ABC. Vypočtěte objem takovéhoto čtyřstěnu.

3. ÚLOHA
Nechť K je konvexní mnohostěn. Vzdáleností dvou bodů na povrchu K nazveme délku nejkratší lomené čáry, která leží celá na povrchu K a spojuje tyto dva body. (Pozn.: tato *minimální cesta* nemusí být určena jednoznačně.) Ke každému bodu na povrchu K existuje *nejvzdálenější bod* na povrchu K. (Pozn.: ani tento nemusí být určen jednoznačně.) Uveďte příklady, které ospravedlní obě výše uvedené poznámky a rozhodněte o platnosti následujícího tvrzení: Nechť P je bod na povrchu K a Q je bod k němu nejvzdálenější. Pak existují alespoň dvě různé minimální cesty z P do Q.

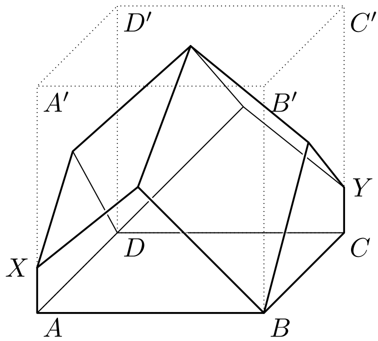
4. ÚLOHA
Bod P leží v průniku tří sfér, přičemž žádná přímka tímto bodem procházející není společnou tečnou všech tří sfér. Dokažte, že průnik všech tří sfér obsahuje bod různý od bodu P.

5. ÚLOHA
V rovině ϱ jsou vybrány body A, B a C a podobně v rovině ϱ' jsou vybrány body A', B' a C'. Roviny ϱ a ϱ' se protínají v přímce p. Rovina ϱ' rotuje kolem přímky p. Nechť v nějaké poloze roviny ϱ' se přímky AA', BB' a CC' protínají v jednom bodě. Pak se tyto přímky protínají v jednom bodě pro všechny polohy roviny ϱ' kromě případu, kdy obě roviny splynou. Dokažte.

Řešení 4. série

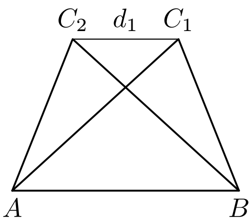
1. ÚLOHA

Ano, viz obrázek.

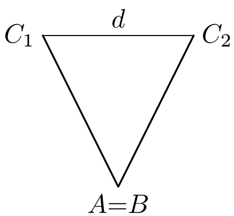


Nakreslený útvar obdržíme takto. Vezměme krychli $ABCDA'B'C'D'$, na jejíž hranách AA', CC' zvolíme body X, Y. Z této krychle pak „odřízneme“ rovinami $B'D'X$, $A'C'B$, $B'D'Y$, $A'C'D$ vrcholy A', B', C', D'.

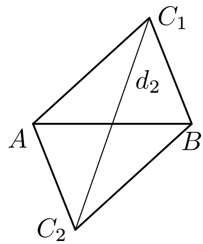
2. ÚLOHA



obr. 1



obr. 2

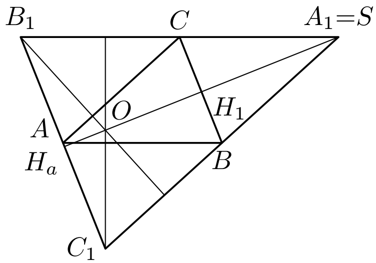


obr. 3

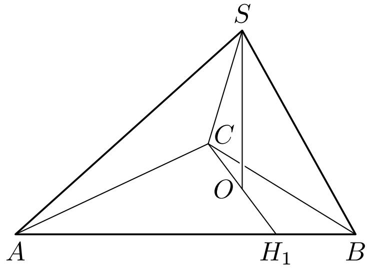
Vezměme dva shodné trojúhelníky se stranami a, b a c a položme jeden na druhý tak, aby strana c byla společnou stranou těchto trojúhelníků (obr. 1). Rozevíráním rovin těchto trojúhelníků zvětšujeme vzdálenost bodů C_1 a C_2 (obr. 2). Ta je maximální v poloze, kdy obě roviny opět splynou a body C_1 a C_2 leží v různých polorovinách s hraniční přímkou AB (obr. 3) Označme vzdálenost C_1 a C_2 na obrázku 1 d_1 a tutéž vzdálenost na obrázku 3 označme d_2. Nutnou a postačující podmínkou pro existenci požadovaného čtyřstěnu je splnění nerovností

$$d_1 < c < d_2 \,.$$

Tyto nerovnosti jsou splněny právě tehdy, když je trojúhelník ABC ostroúhlý. (Promyslete si to podrobněji.) Nechť tedy trojúhelník ABC je ostroúhlý.



obr. 4



obr. 5

Na obrázku 4 máme povrch hledaného čtyřstěnu rozvinutý do roviny, dále $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ a $C_1A_1 \parallel CA$. Nechť $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $a \le b \le c$ a $2p = a + b + c$. Přidržíme-li se značení na obrázcích 4 a 5, vidíme, že velikost výšky $h = SO$ čtyřstěnu můžeme vypočítat z pravoúhlého trojúhelníka SH_1O: Nejdříve vypočteme $|SH_1| = |A_1H_1|$ a $|H_1O|$.

$$
\begin{gathered}
|A_1H_1| = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,, \\
|OH_1| = |H_1H_a| - |OH_a|, \qquad |H_1H_a| = |H_1A_1|\,,
\end{gathered}
$$

velikost $|OH_a|$ můžeme vypočítat ze vztahu

$$
\frac{|OH_a|}{|C_1H_a|} = \frac{|B_1H_c|}{|C_1H_c|}\,,
$$

který plyne z podobnosti trojúhelníků C_1OH_a a $C_1D_1H_c$. Jednoduchým výpočtem dostaneme

$$
|OH_a| = \frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}{4a\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}\,.
$$

Dále

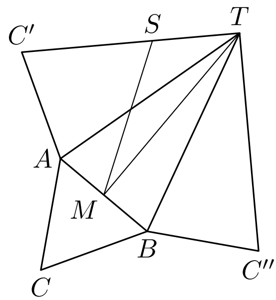
$$
\begin{aligned}
h^2 = |A_1H_1|^2 - (|H_1H_a| - |OH_a|)^2 = |OH_a|(|A_1H_a| - |OH_a|) &= \\
= \frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{8p(p-a)(p-b)(p-c)}&
\end{aligned}
$$

Konečně, označíme-li hledaný objem V, dostáváme

$$
\begin{aligned}
V = \frac{h}{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} &= \\
= \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}&
\end{aligned}
$$

3. ÚLOHA

Tvrzení není pravdivé. Uvedeme příklad konvexního mnohostěnu a bodu na něm takového, že k bodu k němu nejvzdálenějšímu vede pouze jedna minimální cesta. Takovým tělesem je kolmý trojboký jehlan $ABCT$, jehož podstavou je rovnostranný trojúhelník ABC a trojúhelníky ABT, ACT a BCT jsou rovnoramenné s úhlem $30°$ při vrcholu T. Na obrázku je znázorněn povrch tohoto jehlanu rozvinutý do roviny. Bod M je středem úsečky AB. Úsečka spojující body M a T leží celá na povrchu jehlanu, tedy je to minimální cesta z M do T a vzdálenost bodů M a T na povrchu jehlanu je $|MT|$. Jiná minimální cesta z M do T zřejmě neexistuje. Nyní ukážeme, že bod T je nejvzdálenější k bodu M.



Trojúhelník $TC'B$ na obrázku je rovnostranný, a tedy $\sphericalangle TC'B$ je roven $60°$ a $\sphericalangle TC'M$ je větší než $60°$. Dále $|\sphericalangle C'TM| = 45° < |\sphericalangle TC'M|$. Odtud plyne, že $|TM| > |C'M|$. Pohybuje-li se bod S po hraně $C'T$ od bodu T k bodu C', velikost úsečky MS stále klesá. Odtud plyne, že v trojúhelníku MTC' je nejvzdálenějším bodem od bodu M bod T. V trojúhelníku $MC'A$ ani v trojúhelníku MAC není zřejmě žádný bod, jehož vzdálenost od bodu M by byla větší než $|MT|$. Vzhledem k tomu, že přímka CT je osou symetrie v našem obrázku, můžeme naše úvahy zopakovat v jeho pravé polovině a důkaz je ukončen.

4. ÚLOHA

Nejprve ukážeme, že žádné dvě sféry se nedotýkají. V opačném případě by společná tečná rovina k těmto sférám procházející bodem P protínala třetí sféru v kružnici. Tečna této kružnice procházející bodem P by byla společnou tečnou všech tří sfér, což ovšem odporuje zadání úlohy.

Tedy dvě sféry se protínají v kružnici k, která zřejmě obsahuje bod P. Tato kružnice nemůže mít s třetí sférou pouze jeden společný bod, jinak by tečna ke kružnici k procházející tímto bodem byla společnou tečnou všech tří sfér. Tedy existují další body v průniku třetí sféry s kružnicí k, což bylo dokázati.

5. ÚLOHA

Nejprve dokážeme, že z našich předpokladů plyne, že se přímky AA' a BB' protínají při jakékoliv poloze roviny ϱ'. V počáteční poloze se tyto přímky protínají, tedy body A, A', B a B' leží v jedné rovině. Rozeberme dvě možnosti

(1) Přímky AB a $A'B'$ jsou různoběžné. Jejich průsečík O nutně leží na přímce p. Dále $|OA| \cdot |OB'| \neq |OB| \cdot |OA'|$, neboť přímky AA' a BB' nejsou rovnoběžné. (Rovnost nastává právě tehdy, když jsou tyto přímky rovnoběžné.) Rovnost však nenastane v žádné poloze roviny ϱ', neboť velikost úseček OA' a OB' se nemění. (Bod O se nepohybuje.) Tedy přímky AB a $A'B'$ jsou stále různoběžné, a tedy se protínají.

(2) Přímky AB a $A'B'$ jsou rovnoběžné. Pak jsou také rovnoběžné s přímkou p. Vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{A'B'}$ jsou opačně orientované. Tato vlastnost se zachovává při pohybu roviny ϱ', a tedy přímky AB a $A'B'$ se stále protínají.

Nechť přímky AA', BB' a CC' v počáteční poloze neleží v jedné rovině. Pak v žádné poloze roviny ϱ' neleží v jedné rovině, ale podle výše dokázaného se v každé poloze roviny ϱ' po dvou protínají. Snadno nahlédnete, že se vždy protínají v jednom bodě.

Nechť přímky AA', BB' a CC' v počáteční poloze leží v jedné rovině. Pak si vypomůžeme přímkou DD', která s vyšetřovanými přímkami neleží v jedné rovině, prochází jejich průsečíkem a $D \in \varrho$ a $D' \in \varrho'$. Použitím předchozí úvahy na trojice přímek AA', BB', DD' a AA', CC', DD' dostáváme kýžené.

Označme M_0 průsečík přímek AA', BB' a CC' v počáteční poloze. Veďme tímto bodem rovinu β kolmou k přímce p a povšimněme si, že bod M (průsečík přímek AA', BB' a CC' v obecné poloze) tuto rovinu nikdy neopustí. Veďme v rovině β bodem M přímku f rovnoběžnou s rovinou ϱ' a dokažme sporem, že poloha průsečíku této přímky s rovinou ϱ (označme ho F) nezávisí na poloze roviny ϱ': Nechť v počáteční poloze je průsečíkem bod F_0 a v nějaké jiné poloze bod F_1 a $F_0 \neq F_1$. V této druhé poloze roviny ϱ' přímka MF_0 ($M \neq F_0$, jinak totiž $F_0 = M = F_1$) protíná rovinu ϱ' v nějakém bodě F'. Podle výše dokázaného v počáteční poloze přímka F_0F' také prochází bodem M, tedy splývá s přímkou f, ale jistě není rovnoběžná s rovinou ϱ' a to je spor. Analogicky ukážeme, že poloha (rozumí se poloha tohoto bodu v rovině ϱ') průsečíku G roviny ϱ' s přímkou g, která leží v rovině β, prochází bodem M a je rovnoběžná s rovinou ϱ, se nemění.

Při pohybu roviny ϱ' se bod M pohybuje v rovině β kolem bodu F, má od něj stále stejnou vzdálenost, která je rovna vzdálenosti bodu G od přímky p. Hledaná množina je tedy kružnice se středem v bodě F a poloměrem $|FM_0|$, ze které vyjmeme dva body — průsečíky této kružnice s rovinou ϱ.