3. série
Nerovnosti

1. Úloha

Určete všechna reálná x, která splňují nerovnost

$$\log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}\,.$$

2. Úloha

Nerovnost

$$2^{\operatorname{tg}\alpha} + 2^{\operatorname{cotg}\alpha} \geq \frac{5}{4}\pi$$

je splněna pro všechna $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dokažte.

3. Úloha

Dokažte, že pro libovolná reálná a, b a c je splněna nerovnost

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab\,.$$

4. Úloha

Nechť $[A]$ značí celou část čísla A. Dokažte, že pro libovolné kladné číslo y a libovolné přirozené číslo k je splněna nerovnost

$$[ky] \geq \frac{[y]}{1} + \frac{[2y]}{2} + \cdots + \frac{[ky]}{k}\,.$$

5. Úloha

Nechť $0 < a < \frac{1}{4}$. Určete všechna reálná x, která splňují nerovnost

$$\log_{x+a} 2 < \log_x 4\,.$$

Řešení 3. série

1. ÚLOHA

Nejprve si ujasníme, pro která x mají zkoumané výrazy smysl. Nutně musí být $x > 0$ a $1 - \frac{x}{4} > 0$. Odtud dostáváme podmínku $0 < x < 4$. Dále zřejmě $3^{2b} = (3^2)^b = 9^b$, neboli $\frac{1}{2}\log_3 a = \log_9 a$ pro všechna $a > 0$. Po těchto úvahách dostáváme

$$\log_9^2 x - \log_9^2 \frac{4-x}{4} \geq 0\,,$$

a tedy

$$\left(\log_9 x - \log_9 \frac{4-x}{4}\right)\left(\log_9 x + \log_9 \frac{4-x}{4}\right) \geq 0\,,$$

což lze přepsat ve tvaru

$$\log_9 \frac{x(4-x)}{4} \log_9 \frac{4x}{4-x} \geq 0\,.$$

Nyní musíme rozebrat dva případy (stále máme na mysli podmínku $0 < x < 4$)

(1) $\frac{x(4-x)}{4} \geq 1$ a $\frac{4x}{4-x} \geq 1$.
Úpravou dostáváme $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ a $4x \geq 4 - x$ a dále $(x-2)^2 \leq 0$ a $x \geq \frac{4}{5}$. Odtud $x = 2$.

(2) $\frac{x(4-x)}{4} \leq 1$ a $\frac{4x}{4-x} \leq 1$.
Úpravou dostáváme $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ a $4x \leq 4 - x$ a dále $(x-2)^2 \geq 0$ a $x \leq \frac{4}{5}$. Odtud $x \leq \frac{4}{5}$.

Celkově máme $x = 2$ nebo $0 < x \leq \frac{4}{5}$.

2. ÚLOHA

Řešení je velmi jednoduché, přesto jej rozdělíme do několika krůčků:

(1) $4 > \frac{5}{4}\pi$:
Zřejmě $\pi < 3\frac{1}{5}$, tedy $5\pi < 16$. Tuto nerovnost vydělíme čtyřmi a jsme hotovi.

(2) $z + \frac{1}{z} \geq 2$, pro všecna $z > 0$:
$1 = \sqrt{z \cdot \frac{1}{z}} \leq \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Zde jsme užili nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Po vynásobení dvojkou dostáváme kýžené.

(3) $\frac{1}{2}\left(2^{\operatorname{tg}\alpha} + 2^{\operatorname{cotg}\alpha}\right) \geq 2$:
Opět užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dostáváme $\frac{1}{2}\left(2^{\operatorname{tg}\alpha} + 2^{\operatorname{cotg}\alpha}\right) \geq \sqrt{2^{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}}$. Položíme-li $z = \operatorname{tg}\alpha$, dostáváme užitím (2) po úpravě kýžené.

Spojením nerovností (1) a (3) je důkaz ukončen.

3. ÚLOHA
Vypomůžeme si výrazem $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ a dokážeme, že

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab\,.$$

Jest $(a^2 - b^2)^2 \geq 0$, neboli $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$. Obdobně ukážeme $a^4 + c^4 \geq 2a^2c^2$ a $b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2$. Sečtením těchto tří nerovností dostáváme

$$2(a^4 + b^4 + c^4) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\,.$$

Sečtením nerovností $a^2(b^2 + c^2 - 2bc) \geq 0$, $b^2(a^2 + c^2 - 2ac) \geq 0$ a $c^2(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0$ dostáváme

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 2(a^2bc + b^2ac + c^2ab)$$

a důkaz je ukončen.

4. ÚLOHA
Označme $\{A\}$ zlomkovou část čísla A, tj. $A - [A]$. Zřejmě $[ky] = [k[y] + k\{y\}]$ a vyšetřovanou nerovnost můžeme zapsat ve tvaru

$$k[y] + [k\{y\}] \geq \left([y] + \frac{\{y\}}{1}\right) + \left([y] + \frac{2\{y\}}{2}\right) + \cdots + \left([y] + \frac{k\{y\}}{k}\right),$$

což je ekvivalentní nerovnosti

$$[k\{y\}] \geq \frac{\{y\}}{1} + \frac{2\{y\}}{2} + \cdots + \frac{k\{y\}}{k}\,.$$

Stačí tedy dokázat požadovanou nerovnost pro $y \in [0; 1]$. Na intervalu $[0; 1]$ jsou obě strany nerovnosti neklesajícími po částech konstantními funkcemi, které mohou měnit svou hodnotu pouze v bodech tvaru $y = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou přirozená a nesoudělná a $2 \leq q \leq k$ a $1 \leq p \leq k - 1$. Vzhledem k tomu stačí dokázat vyšetřovanou nerovnost pouze v bodech tohoto tvaru (a ovšem také v bodě 0; proveďte). Definujme čísla a_l, b_l přepisem

$$a_l = \left[l\frac{p}{q}\right], \qquad b_l = q\left\{l\frac{p}{q}\right\}, \qquad l = 1, \ldots, k\,,$$

potom $0 \leq b_l < q$, $lp = a_lq + b_l$ a nerovnost, kterou musíme dokázat, má tvar

$$a_k \geq \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k}\,.$$

Čísla $b_1, b_2, \ldots, b_{q-1}$ jsou nenulová a navzájem různá (Dokažte užitím nesoudělnosti p a q.) Odtud plyne

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_{q-1}\} = \{1, 2, \ldots, q - 1\}\,.$$

Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dostáváme

$$\frac{\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_{q-1}}{q-1}}{q-1} \geq \sqrt[q-1]{\frac{b_1 b_2 \dots b_{q-1}}{1\,2\dots(q-1)}} = \sqrt[q-1]{\frac{(q-1)!}{(q-1)!}} = 1\,.$$

Odtud plyne

$$\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_k}{k} \geq \frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_{q-1}}{q-1} \geq q-1\,,$$

a tedy

$$a_k+\frac{q-1}{q} \geq a_k+\frac{b_k}{q} = \frac{kp}{q} = \frac{p}{q}+\frac{2p}{2q}+\cdots+\frac{kp}{kq} = \frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}+ \\ +\frac{1}{q}\left(\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_k}{k}\right) \geq \frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}+\frac{q-1}{q}$$

a důkaz je hotov.

5. Úloha

Nejprve si povšimneme, že $x>0$ a $x\neq 1$. Daná nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$\frac{1}{\log_2(x+a)} < \frac{2}{\log_2 x}\,,$$

tedy také nerovnosti

$$\frac{2}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2(x+a)} > 0\,,$$

odkud úpravou dostáváme

$$\text{(N)} \qquad \frac{2\log_2(x+a)-\log_2 x}{\log_2(x+a)\log_2 x} > 0\,.$$

Nyní rozebereme tři případy

(1) $0<x<1$ a $0<x+a<1$. Potom $\log_2 x<0$ a $\log_2(x+a)<0$. Nerovnost (N) je ekvivalentní nerovnosti

$$2\log_2(x+a)-\log_2 x>0\,.$$

Tyto tři nerovnosti jsou ekvivalentní nerovnostem

$$0<x<1, \qquad x<1-a, \qquad \log_2(x+a)^2>\log_2 x\,,$$

které můžeme dále ekvivalentně upravit

$$0 < x < 1 - a, \qquad (x+a)^2 > x\,,$$

neboli

$$0 < x < 1 - a, \qquad x^2 - (1-2a)x + a^2 > 0\,.$$

Diskriminant D trojčlenu v poslední nerovnosti je kladný pro všechna $a \in (0; \frac{1}{4})$ ($D = 1 - 4a$); tedy

$$x^2 - (1-2a)x + a^2 = (x - x_1)(x - x_2)\,,$$

kde

$$x_1 = \frac{1}{2} - a - \sqrt{\frac{1}{4} - a} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{1}{2} - a + \sqrt{\frac{1}{4} - a}\,,$$

přičemž $x_1 < x_2$. Čísla x_1 a x_2 vyhovují systému rovnic

$$x_1 x_2 = a^2\,,$$
$$x_1 + x_2 = 1 - 2a\,,$$

ze kterého plyne, že jsou obě kladná. Dále zřejmě $x_1 + x_2 = 1 - 2a = 1 - a - a < 1 - a$, tedy každé z těchto čísel je menší než $1 - a$. Řešením našich nerovností je sjednocení intervalů: $(0; x_1) \cup (x_1; 1 - a)$

(2) $0 < x < 1$ a $x + a > 1$. Naprosto stejnými úvahami dostaneme nakonec nerovnosti

$$1 - a < x < 1, \qquad x^2 - (1-2a)x + a^2 < 0\,.$$

Z úvah o poloze kořenů vzhledem k číslu $1 - a$ plyne, že tyto nerovnosti nemají řešení.

(3) $x > 1$ a $a \in (0; \frac{1}{4})$. Nerovnost (N) je pak ekvivalentní nerovnosti

$$2 - \frac{\log_2 x}{\log_2(x+a)} > 0\,. \tag{M}$$

Máme $1 < x < x + a$, tedy $0 < \log_2 x < \log_2(x+a)$, neboli

$$0 < \frac{\log_2 x}{\log_2(x+a)} < 1\,.$$

Nerovnost (M) je tedy splněna pro všechna $x > 1$ a $a \in (0; \frac{1}{4})$.

Celkově máme: pro libovolné $a \in (0; \frac{1}{4})$ je rešením zadané nerovnosti sjednocení intervalů

$$\Big(0; \frac{1}{2} - a - \sqrt{\tfrac{1}{4} - a}\Big) \cup \Big(\frac{1}{2} - a + \sqrt{\tfrac{1}{4} - a}; 1 - a\Big) \cup (1; \infty)\,.$$