

2. série

Kombinatorika

1. ÚLOHA

Marta Sochorová, Iva Kratochvílová, Petr Čížek a Ondřej Pokluda soutěžili v pojídání švestkových knedlíků. Na tiskové konferenci po skončení soutěže řekli toto:

- (1) Marta: Nebyla jsem první ani poslední.
- (2) Iva: Nebyla jsem poslední.
- (3) Petr: Byl jsem první.
- (4) Ondřej: Byl jsem poslední.

Libor Běhounek vám vzkazuje, že právě jeden ze soutěžících lhal. Určete vítěze a odhalte lháře!

2. ÚLOHA

Je dáno 1990 různých množin, každá z nich obsahuje právě 40 prvků. Průnik dvou různých množin obsahuje vždy právě jeden prvek. Dokažte existenci prvku, který je obsažen ve všech 1990 množinách.

3. ÚLOHA

Na soustředění korespondenčního semináře byli pozváni účastníci obého pohlaví. Na seznamovacím večírku vyšlo najevo, že při vytvoření jakékoliv skupiny dívek je počet chlapců, kteří se znají s alespoň jednou dívkou z této skupiny, větší nebo roven počtu dívek v této skupině. Dokažte, že lze vytvořit taneční páry při splnění těchto podmínek:

- (1) Každý taneční pár obsahuje chlapce a dívku, kteří se znají.
- (2) Každá dívka je obsažena v právě jednom tanečním páru.
- (3) Každý chlapec je obsažen v nejvýše jednom tanečním páru.

4. ÚLOHA

V tichomořském státě Akubali chystají parlamentní volby. Kandidují pouze dvě politické strany. Každý z jednoho miliónu oprávněných voličů může odevzdat svůj hlas jedné politické straně, nebo se může zdržet hlasování. Volební výsledek se udává ve formě uspořádané trojice:

[počet hlasů pro republikány; počet hlasů pro demokraty; počet nehlasujících].

Kolik je možných volebních výsledků?

5. ÚLOHA

V rovině leží n přímek ($n > 2$), které rovinu dělí na několik oblastí. Některé z těchto oblastí jsou obarveny, přičemž žádné dvě obarvené oblasti se nedotýkají. (Jeden společný bod nepovažujeme za dotyk.) Dokažte, že počet obarvených oblastí nemůže být větší než $\frac{1}{3}(n^2 + n)$.

Řešení 2. série

1. ÚLOHA

Zvítězila Iva, lhal Petr. Kdyby lhala Marta, byla by první nebo poslední, to by byl spor s pravdivými výroky Petra a Ondřeje. Podobně kdyby lhala Iva, byl by to spor s výrokem Ondřeje. Předpoklad, že lže pouze Ondřej také vede ke sporu, neboť by nikdo nemohl být poslední. Lže tedy Petr (předpokládáme totiž, že Libor nelže). Ondřej byl poslední, Marta a Petr nebyli první, tedy zvítězila Iva.

Stanovisko Ivy Kratochvílové: Důrazně odmítám označení „žrout“ (vyskytlo se v některých řešeních). V soutěži pojídání švestkových knedlíků samozřejmě nešlo o množství snědených knedlíků, ale o estetickou stránku jedení. Ondřejovi vyklouzl jeden knedlík z talíře na zem, tím se dostal na poslední místo. Petr knedlíky nechutně hltal a domníval se, že je první — nejedná se tedy o žádnou deformaci, ale víceméně o omyl. K mému vítězství nad Martou dopomohlo domácí prostředí, soutěžilo se na půdě KMA.

2. ÚLOHA

Uvažujme jednu z daných množin. Ta má neprázdný průnik s 1989 ostatními množinami, a proto alespoň jeden z prvků této množiny (označme ho a) je obsažen nejméně v 50 množinách. Pokud by totiž každý prvek byl obsažen nejvýše ve 49 množinách, pak by všech množin bylo nejvýše $1 + 40 \times 49 = 1961$. Ostatní prvky v těchto 50 množinách jsou navzájem různé. Dokážeme, že a leží ve všech 1990 množinách. Nechť ne. Pak existuje množina B , která neobsahuje prvek a . Každá ze zmíněných 50 množin musí mít neprázdný průnik s množinou B , tedy B má alespoň 50 prvků a to je spor.

3. ÚLOHA

Tvrzení dokážeme indukcí podle počtu dívek $= n$. Nechť $n = 1$, pak máme k dispozici jednu dívku a z předpokladů plyne existence chlapce, který ji zná. Utvořme z nich pár a jsme hotovi. Nechť je tvrzení dokázáno pro všechna $m < n$, dokažme je i pro n . Rozeberme dva případy:

- (1) Existuje k -prvková množina A dívek, $0 < k < n$, taková, že počet všech chlapců, kteří se znají s některou z dívek z množiny A je rovno k . Každá z dívek z této skupiny vytvoří pár s některým z chlapců (což lze díky indukčnímu předpokladu). Ukážeme, že zbývající dívky tvoří skupinu (označme ji B), která splňuje spolu se skupinou zbývajících chlapců předpoklady úlohy. Nechť B obsahuje i dívek. Potom $i + k$ dívek z $A \cup B$ zná alespoň $i + k$ chlapců, z nichž však pouze k zná některou z dívek z A , tedy alespoň i zbylých chlapců zná některou z dívek z B . Dle indukčního předpokladu můžeme vytvořit páry a jsme hotovi.
- (2) Pro libovolnou k -prvkovou množinu dívek obsahuje skupina známých alespoň $(k + 1)$ chlapců. Utvořme jeden pár. Zbývající skupina dívek spolu se všemi chlapci splňuje předpoklady úlohy. Libovolná k -prvková množina zbylých dívek

($k < n - 1$) se totiž zná nejméně s $k + 1$ chlapci (z nichž jeden může již tvořit pár). Podle indukčního předpokladu můžeme vytvořit páry a opět jsme hotovi.

4. ÚLOHA

Úlohu přeformulujeme takto: kolika způsoby lze seřadit jeden milión kuliček a dvě krychličky? (Uvědomte si souvislost obou úloh.) Přeformulovanou úlohu snadno vyřešíme. 1000002 předměty uspořádáme 1000002! způsoby. Na pořadí kuliček však nezáleží a ty lze uspořádat 1000000! způsoby. Rovněž na pořadí krychliček nezáleží, ty uspořádáme dvěma způsoby. Odpověď tedy zní

$$\frac{1000002!}{1000000!2!} = 1000001 \times 500001.$$

5. ÚLOHA

Jsou-li všechny přímky navzájem rovnoběžné, je tvrzení zřejmě pravdivé. Jinak označme m_2, m_3, \dots počty obarvených oblastí, které mají 2, 3, ... stran. Pak $m_2 \leq n$. Každá přímka je rozdělena zbývajícími na nejvýše n částí, tedy počet všech částí všech přímek je nejvýše n^2 . Tudíž $2m_2 + 3m_3 + \dots \leq n^2$. Konečně máme

$$m_2 + m_3 + \dots \leq \frac{m_2}{3} + \frac{2m_2 + 3m_3 + \dots}{3} \leq \frac{n(n+1)}{3}.$$