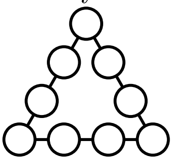
6. série

Magické obrazce

1. ÚLOHA

Rozmístěte všechna čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ do kroužků tak, aby součet čísel na každé straně a součet kvadrátů na každé straně byl konstantní.



2. ÚLOHA

Magická krychle je krychle, v jejímž každém vrcholu je napsáno číslo, přičemž součet čísel ve všech rovinách, které obsahují čtyři vrcholy, je konstantní. Zjistěte, zda musí být všechna čísla stejná.

3. ÚLOHA

Připište k vrcholům pravidelného čtyřstěnu navzájem různá reálná čísla taková, aby součet čísel ve vrcholech každé stěny byl konstantní.

4. ÚLOHA

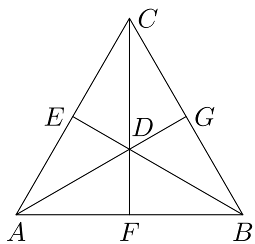
Uvažujme magický čtverec 3×3 (součet čísel ve sloupcích, řádcích a úhlopříčkách je konstantní), který je tvořen celými čísly.

(i) Vyjádřete součet čísel ve vrcholech čtverce pomocí čísla ve středu čtverce.

(ii) Dokažte, že součet čísel v řádku je dělitelný třemi.

5. ÚLOHA

K vrcholům A, B, C, D, E, F, G jsou přiřazena čísla tak, že platí, že součet čísel na přímkách jdoucích body A a D je konstantní. Je nutně součet na všech vyznačených přímkách konstantní, nebo musí být splněna ještě další podmínka? Jestliže ano, pokuste se ji zformulovat. Musí už potom být všechna čísla stejná?



Řešení 6. série

2. ÚLOHA
Označme si čísla u vrcholů krychle a, b, c, d, e, f, g, h, pak jistě platí $a+b+c+d = a+b+e+f = a+b+g+h$, tedy $c+d = e+f = g+h$, odtud plyne, že součet čísel na každé úsečce téhož směru je stejný (kromě uhlopříček), tedy platí $a+b = c+d$ a také $a+d = b+c$, z čehož už plyne, že $a = c$ a $b = d$. Totéž můžeme provést i pro ostatní dvojice vrcholů tvořících úhlopříčku krychle. Získáváme tedy $a = c = f = h$ a $b = d = e = g$. Když přiřadíme první a druhé čtverici různá čísla, získáme řešení, a tak všechna čísla nemusí být stejná.

3. ÚLOHA
Uvažme libovolnou hranu, ta je součástí dvou stěn, proto ve zbývajících vrcholech těchto stěn musí být stejné číslo. K vrcholům čtyřstěnu nelze připsat čísla požadovaným způsobem.

4. ÚLOHA
Označme číslo ve středu čtverce a a součet čísel v řádku s. Sečtěme čísla v obou úhlopříčkách a v prostředním sloupci a řádku. Součet má být jednak $4s$ a taky $3s+3a$ (je to součet všech čísel, ale prostřední se opakovalo čtyřikrát). Tedy $s = 3a$. Sečteme-li obě úhlopříčky získáme jednak součet rohových čísel zvětšený o $2a$ a také $2s$. Součet v rozích je tedy roven $4a$.

5. ÚLOHA
Z podmínky ze zadání dostáváme $E + C = F + B$ a $E + B = C + F$ (ztotožněme vrchol s číslem jemu připsaným), odkud plyne $E = F$ a $B = C$ a odtud dále $A = D$. Žádná podmínka nám ale neříká, že $C + G + B = A + E + C$. Položme $A = D = 1$, $B = C = E = F = 2$ a $G = 3$ — vidíme, že $C+G+B \neq A+E+C$, přestože podmínky ze zadání jsou splněny. Přidáme-li podmínku $C+G = E+D$, jistě budou všechny součty stejné, ale může být $A = B = C = D \neq E = F = G$.