5. série

Dirichletův princip

1. Úloha

V jednotkovém čtverci leží 101 bodů. Zjistěte, zda musí existovat kruh o poloměru 1/7, v němž leží aspoň 5 daných bodů.

2. Úloha

V každém mnohostěnu existují aspoň dvě stěny s týmž počtem vrcholů. Dokažte.

3. Úloha

V kouli o objemu V je dáno 11 bodů. Dokažte, že existuje kulová výseč o objemu $\frac{1}{8}V$, uvnitř které se nenachází žádný z daných bodů. Kulová výseč je průnik koule a dvou poloprostorů, jejichž hraniční roviny procházejí středem koule.

4. Úloha

Mějme v rovině lichý počet bodů A_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n + 1$, jejichž vzájemné vzdálenosti jsou po dvou různé. Spojme každý bod s nejbližším bodem úsečkou. Dokažte, že existuje bod A_k, který patří právě jedné úsečce.

5. Úloha

Pro každé přirozené číslo n nesoudělné s 10 existuje jeho násobek, jehož dekadický zápis se skládá ze samých jedniček. Dokažte.

Řešení 5. série

1. ÚLOHA

Čtverec si rozdělíme na 5×5 čtverečků o hraně $1/5$. Úhlopříčka malého čtverečku je kratší než $2/7$, neboť

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49} > \frac{4}{50} = \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 .$$

Velký čtverec tedy můžeme pokrýt pětadvaceti kruhy o poloměru $1/7$, kdyby v každém z nich byly jen čtyři body, bylo ve velkém čtverci nejvýše 100 bodů, což je spor.

2. ÚLOHA

Předpokládejme, že mnohostěn má n stěn, každé stěně přiřaďme bod v rovině a dva body spojme, právě když jim příslušné stěny mají společnou hranu. Z každého bodu vychází tolik čar, kolik má jemu příslušná stěna hran a tedy i vrcholů. Kdyby měla každá stěna jiný počet vrcholů, muselo by z nějakého bodu vycházet alespoň n čar, pak by ale mezi některými body byly aspoň dvě čáry, což je spor.

3. ÚLOHA

Hraniční roviny nemůžeme do výsečí počítat, neboť pak by střed koule ležel v každé z nich. Uvědomíme-li si, že pokud ve výseči leží nějaký bod, leží tam s ním i celá usečka procházející jím a středem až na povrch koule, lze BÚNO předpokládat, že všechny body leží na povrchu koule. Nyní rozdělme kouli rovinou ρ, ve které leží střed a dva z daných bodů. (To lze, neboť každé tři body leží v rovině.) Získame tak dvě stejné části, ve kterých leží celkem devět bodů. V jedné z nich jsou tedy nejvýše čtyři body. Tuto část rozdělíme třemi rovinami protínajícími se v jedné přímce, která obsahuje střed, na čtyři výseče o objemu $\frac{1}{8}V$ (představte si plátky pomeranče). Nyní budeme otáčet koulí okolo přímky procházející středem a kolmé na ρ (dělící roviny zůstavají na místě). Jednou se dostaneme do polohy, kdy jeden z bodů bude patřit některé ze tří rovin (to proto, že při otočení o 180° budou všechny body v jiných výsečích) a tím budeme mít tři body ve čtyřech výsečích, takže jedna bude prázdná. (Uvědomte si, proč se počet bodů v polokoulích při otáčení nemění.)

4. ÚLOHA

Každý bod spojíme s nejbližším bodem úsečkou, tím každému bodu přiřadíme právě jednu úsečku, ale jedna z úseček je nejkratší a tu jsme nutně museli přiřadit oběma jejím krajním bodům, tedy počet úseček je nejvýše $2n$. Kdyby z každého bodu vycházely aspoň dvě úsečky, musel by být počet úseček aspoň $2n+1$, tím jsme dokázali, že existuje bod A, který je krajním bodem nejvýše (právě) jedné úsečky. Kdyby byl bodem aspoň dvou úseček, pak by ležel uprostřed nějaké úsečky BC, což by znamenalo, že B je nejbližší k bodu C, nebo C je nejbližší k bodu B, ale to je spor, protože bod A je určitě blíž.

5. ÚLOHA

Nejprve dokážeme, že funkce $f : \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \to \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ taková, že $f(k) = 10k+1 \mod n$, je na. Stačí dokázat, že $g(k) := 10k \mod n$ je na. Kdyby nebyla, existovala by $k_1 \neq k_2$ taková, že $g(k_1) = g(k_2)$, tedy $n|10(k_1 - k_2)$, což je spor, který dokazuje, že f je na. To znamená, že je i prostá a ke každému k existuje jednoznačně určené l takové, že $f(l) = k$.

Uvažujme posloupnost $a_0 = 0, a_{n+1} = 10a_n + 1$, tj. posloupnost všech čísel, skládajících se ze samých jedniček. Jistě posloupnost $b_k = (a_k \bmod n)$ je periodická (když jsou dva její členy stejné, pak mají i stejné následníky) a protože i předchůdce je určen jednoznačně, nemůže mít předperiodu. Protože první člen této posloupnosti je 0, musí se i někde dál vyskytovat nula, což jsme chtěli dokázat.