4. série

O funkcích

1. ÚLOHA

Dokažte, že pro žádný mnohočlen $f(x)$ s celočíselnými koeficienty nemohou platit rovnosti $f(7) = 11$ a $f(11) = 13$.

2. ÚLOHA

Nechť a je nenulové reálné číslo a funkce f má tyto vlastnosti:

(a) je-li f definovaná v čísle x, je též definovaná v čísle $x + a$

(b) pro všechna x z definičního oboru funkce f platí:

$$f(a+x) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}\,.$$

(i) Dokažte, že funkce f je periodická.

(ii) Udejte příklad takové funkce.

3. ÚLOHA

Nechť každému reálnému číslu x je přiřazeno reálné číslo $A(x)$. Předpokládejme, že pro libovolná x, y platí:

(a) $A(x+y) = A(x) + A(y)$

(b) $A(x \cdot y) = A(x) \cdot A(y)$

Dokažte, $A(x) = x$ nebo $A(x) = 0$.

4. ÚLOHA

Jsou dány funkce: $S(x) = 1 - x,\ T(x) = x/2$, definované na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dokažte, že existuje funkce f ve tvaru složení $f = g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n$, kde n je vhodné přirozené číslo a funkce g_i je rovna S nebo T pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ takové, že

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1981}{2^{1981}}.$$

5. ÚLOHA

Dokažte, že neexistuje rostoucí funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, pro kterou platí:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} :\ f(m \cdot n) = f(m) + f(n).$$

Řešení 4. série

1. ÚLOHA

Nechť $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, potom platí

$$f(x) - f(y) = a_n \left(x^n - y^n\right) + \dots + a_1 \left(x - y\right) \ .$$

Protože

$$x^n - y^n = (x - y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right) \ ,$$

tak $x - y | x^n - y^n$ a tedy $x - y | f(x) - f(y)$ (pokud jsou $a_1, a_2, \dots, a_n$ celá čísla), což pro zadané hodnoty evidentně neplatí.

2. ÚLOHA

Použitím (b) pro $a + (a + x)$ a rozepsáním dostaneme

$$f(2a + x) = -\frac{1}{f(x)} \ ,$$

tedy $f(4a + x) = f(x)$ pro všechna x a funkce je periodická. Příkladem takové funkce je funkce f definovaná jako 2 na $[4ak, (4k + 1)a)$, -3 na $[(4k + 1)a, (4k + 2)a)$, $-\frac{1}{2}$ na $[(4k + 2)a, (4k + 3)a)$ a $\frac{1}{3}$ na $[(4k + 3)a, (4k + 4)a)$.

4. ÚLOHA

Uvažujme zápis čísla $\frac{k}{2^n}$ $(k < 2^n)$ ve dvojkové soustavě. Rozmyslete si, že funkce S zinvertuje všechny číslice kromě poslední a funkce T posune všechny cifry o jedno místo a před ně dá nulu. Na začátku máme $\frac{1}{2} = 0,1$ ve dvojkové soustavě, číslo $\frac{1981}{2^{1981}}$ označme c. Pokud desetinný rozvoj čísla c končí na 01, zobrazíme číslo $0,1$ zobrazením T a dostaneme $0,01$. Pokud končí na 11, zobrazíme číslo $0,1$ nejprve zobrazením S, pak zobrazením T a opět zobrazením S a dostaneme $0,11$. Stejným způsobem přidáme další cifry desetinného rozvoje čísla c, které předcházejí těm, které už máme.

5. ÚLOHA

Aby byla funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ rostoucí, musí splňovat $f(b) - f(a) \geq b - a$ pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ (důkaz indukcí přes rozdíl $b - a$). Pro funkci splňující podmínku ze zadání ale platí $f(n) = f(mn) - f(m) \geq mn - m = m(n-1)$, což není možné, protože pravá strana může pro pevné $n > 1$ nabývat libovolně velké hodnoty.