3. série

Geometrie

1. ÚLOHA

Nechť a, b jsou odvěsny, c přepona pravoúhlého trojúhelníka a v výška spuštěná z vrcholu pravého úhlu na přeponu. Dokažte, že existuje trojúhelník se stranami $v, c + v, a + b$ a dokažte, že tento trojúhelník je pravoúhlý.

2. ÚLOHA

P je vnitřní bod rovnostranného trojúhelníka ABC. Dokažte, že součet vzdáleností bodu P od libovolných dvou vrcholů trojúhelníka je větší než vzdálenost bodu P od zbývajícího vrcholu.

3. ÚLOHA

Jestliže trojúhelník má obvod s, potom pro jeho plošný obsah P platí:

$$P \leq \frac{s^2}{12\sqrt{3}}.$$

Dokažte. Kdy nastane rovnost?

4. ÚLOHA

Nechť P je vnitřní bod trojúhelníka. Dokažte, že součet vzdáleností bodu P od stran trojúhelníka je větší než jeho nejmenší výška a menší než jeho největší výška.

5. ÚLOHA

Nalezněte neznámou operaci $\circ$ definovanou na reálných číslech, pro kterou platí následující identity:

$$z \cdot (x \circ y) = (z \cdot x) \circ (z \cdot y)$$

$$(x \circ y) + [(x + y) \circ (x - y)] = 4x + y.$$

6. ÚLOHA

Nalezněte všechna reálná řešení soustavy:

$$2x^2 + y^2 - 6xy + 12 = 0$$
$$x^2 - 2y^2 - 4xy + 8y + 4 = 0\,.$$

Řešení 3. série

1. ÚLOHA
Chceme, aby platilo $v^2 + (a+b)^2 = (c+v)^2$. Rozepsáním dostaneme $v^2 + a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + v^2 + 2cv$, což jistě platí, neboť $a^2 + b^2 = c^2$ (a, b, c jsou strany pravoúhlého trojúhelníka) a $ab = cv$ je dvojnásobek obsahu trojúhelníka.

2. ÚLOHA
Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že součet vzdáleností bodu P od dvou vrcholů je větší než strana trojúhelníka. Na druhou stranu je zřejmé, že vzdálenost bodu P od vrcholu je menší než strana trojúhelníka (neboť celý trojúhelník leží uvnitř kruhu se středem v jednom vrcholu a poloměrem rovným délce strany trojúhelníka.

3. ÚLOHA
Vyjdeme z Heronova vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníka:

$$P = \sqrt{\left(\frac{s}{2} - a\right)\left(\frac{s}{2} - b\right)\left(\frac{s}{2} - c\right)\frac{s}{2}}.$$

Umocněním obou stran na 2/3 dostaneme

$$P^{\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{s}{2} - a\right)\left(\frac{s}{2} - b\right)\left(\frac{s}{2} - c\right)\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Použitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem získáme

$$P^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{3}\left(\left(\frac{s}{2} - a\right) + \left(\frac{s}{2} - b\right) + \left(\frac{s}{2} - c\right)\right)\left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Odtud již snadno dostaneme požadovanou nerovnost. Rovnost nastává, pokud $a = b = c$, tedy pokud je trojúhelník rovnostranný.

4. ÚLOHA
Označme a, b, c délky stran trojúhelníka tak, že $a \geq b \geq c$ a vzdálenosti bodu P od stran trojúhelníka s_a, s_b, s_c. Pak obsah S trojúhelníka můžeme spočítat několika způsoby:

$$P = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}cv_c = \frac{1}{2}\left(as_a + bs_b + cs_c\right).$$

Dle předpokladu je

$$\frac{1}{2}a(s_a + s_b + s_c) \geq \frac{1}{2}(as_a + bs_b + cs_c) \geq \frac{1}{2}c(s_a + s_b + s_c)\ ,$$

odkud již plynou obě dokazované nerovnosti.

5. Úloha

Dosadíme-li do druhé identity postupně $[x, y], [\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}]$, dostaneme:

$$(x \circ y) + [(x+y) \circ (x-y)] = 4x + y$$
$$\left[\left(\frac{x+y}{2}\right) \circ \left(\frac{x-y}{2}\right)\right] + (x \circ y) = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y\,.$$

Odečteme-li druhou nerovnost od první a vytkneme-li $\frac{1}{2}$ za použití první identity, dostaneme:

$$\frac{1}{2}[(x+y) \circ (x-y)] = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y.$$

Dosazením do druhé identity za $[(x+y) \circ (x-y)]$, získáme $x \circ y = x + 2y$. Stačí ověřit, že tato operace vyhovuje oběma identitám.