1. série
Rovinné grafy

1. ÚLOHA
V jistém městě byly čtyři fotbalové stadiony S_1, S_2, S_3, S_4 a čtyři specializované nemocnice N_1, N_2, N_3, N_4. Kvůli obzvlášť vášnivým fanouškům vznikla potřeba spojit každý stadion s každou nemocnicí cestami tak, aby se navzájem neprotínaly (nebyly křižovatky). Určete, jaký je minimální počet nadjezdů, které je potřeba postavit.

2. ÚLOHA
Ve 25. století se budou nad Zemí vznášet města ve tvaru pneumatiky. Navrhněte, jak budou řešit jejich obyvatelé předchozí úlohu.[1]

3. ÚLOHA
Jaký může být maximální počet vrcholů konvexního mnohostěnu, jehož všechny stěny jsou trojúhelníky a stupeň každého jeho vrcholu je menší než 6? Své tvrzení dokažte. (Stupněm vrcholu mnohostěnu rozumíme počet hran, které se v něm setkávají.)

4. ÚLOHA
Trojúhelník ABC rozdělte na 15 trojúhelníků tak, aby se v každém vrcholu sbíhal sudý počet úseček.

5. ÚLOHA
Je dána operace $\circ$, která je definována pro všechna x, y, z reálná následujícími rovnostmi:

$$\begin{aligned} x \circ y &= y \circ x \\ (x \circ y) + z &= (x + z) \circ (y + z) \\ (x \circ y) \cdot z &= (x \cdot z) \circ (y \cdot z)\,. \end{aligned}$$

Najděte neznámou operaci.

6. ÚLOHA
Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla a nechť $a > c$, $b > c$. Dokažte, že platí:

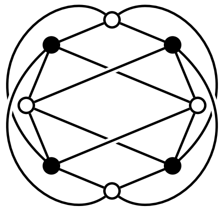
$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}.$$

[1]Na tvaru a délce cest v úlohách 1, 2 nezáleží, po každém nadjezdu smí vést jen jedna cesta, každý nadjezd prochází jen nad jednou cestou.

Řešení 1. série

1. ÚLOHA

Čtyři nadjezdy jistě stačí (viz obrázek). Dokážeme, že když odstraníme libovolné tři cesty, stále ještě se budou některé dvě cesty křížit.

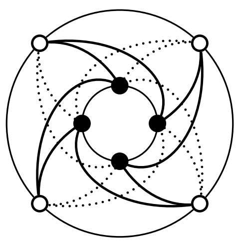


Lemma 1. Graf $K_{3,3}$ není rovinný.
Důkaz: Toto lemma říká, že máme-li tři stadiony a tři nemocnice, bude se aspoň jedna dvojice cest křížit. Uvažujme cestu $S_1 - -N_1 - -S_2 - -N_2 - -S_1$, tato cesta jistě rozděluje rovinu na dvě části, mají-li být N_3 a S_3 spojeny, musí ležet oba ve stejné části, umístěme tedy N_3 a spojme s S_1 a S_2. Nyní už máme tři oblasti a ať bude N_3 ležet v kterékoli, nebude moci být spojena s jedním ze stadionů (nakreslete si obrázek).

A nyní k problému čtyř nemocnic a čtyř stadionů — pokud aspoň dvě z vynechaných cest vycházejí ze stejného místa (nechť je to BÚNO S_1), pak třetí vynechaná cesta vede do nějaké nemocnice (označme ji N_1) a vezmeme-li si nyní nemocnice N_2, N_3, N_4 a stadiony S_2, S_3, S_4, nechybí mezi nimi žádná cesta, tedy dle lemmatu se některá dvojice cest kříží. Pokud žádné dvě z vynechaných cest nevycházejí ze stejného místa, můžeme předpokládat, že jsme vynechali cesty $S_1 - -N_1, S_2 - -N_2, S_3 - -N_3$. Uvažujme trojice S_1, S_2, S_4 a N_1, N_3, N_4, mezi nimi chybí jen jedna cesta (mezi S_1 a N_1), tu ale můžeme nahradit cestou $S_1 - -N_2 - -S_3 - -N_1$. Takže opět z lemmatu plyne, že se aspoň dvě cesty budou křížit. Tím jsme dokázali, že se kříží aspoň čtyři dvojice cest.

2. ÚLOHA

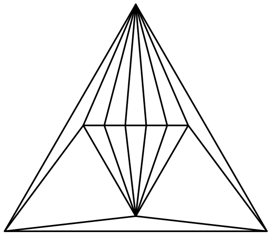
Na pneumatice lze cesty postavit bez křížení (viz obrázek).



3. ÚLOHA

Eulerova věta (dokáže se snadno indukcí) říká: $s+v = h+2$, kde s je počet stěn, h počet hran a v počet vrcholů konvexního mnohostěnu. Pro náš mnohostěn jistě platí $s = 2/3 \cdot h$ (neboť každá hrana patří dvěma stěnám a každá stěna má tři hrany). Dosadíme-li do Eulerovy rovnice, dostaneme $2/3 \cdot h + v = h + 2$, neboli $v = 1/3 \cdot h + 2$. Protože z každého vrcholu vychází nejvýše pět hran a každá hrana má dva vrcholy, platí $h \leq 5/2 \cdot v$, dosazením do upravené rovnice máme $v \leq 5/6 \cdot v + 2$, tj. $v \leq 12$. Protože mnohostěn požadovaných vlastností s dvanácti vrcholy existuje (je to pravidelný dvacetistěn), je maximální počet vrcholů 12.

4. Úloha



5. Úloha

Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí $x \circ y = (0 + x) \circ ((y - x) + x)$, to se podle 2. rovnice rovná $[0 \circ (y - x)] + x = [0 \cdot (y - x) \circ 1 \cdot (y - x)] + x$. Upravíme-li vnitřek hranaté závorky podle třetí rovnice, dostaneme $(0 \circ 1) \cdot (y - x) + x$, tedy $x \circ y = x[1 - (0 \circ 1)] + y(0 \circ 1)$. Aby byla operace $\circ$ komutativní (splňovala první rovnici), musí být $0 \circ 1 = 1/2$ a tedy pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ musí platit $x \circ y = \frac{x+y}{2}$. Stačí ověřit, že takto definovaná operace skutečně vyhovuje všem třem rovnicím.

6. Úloha

Jistě $[c - \sqrt{(a-c)(b-c)}]^2 \geq 0$, tedy $c^2 - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} + (a-c)(b-c) \geq 0$, což po roznásobení dává $c^2 - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} - ac - bc + c^2 \geq -ab$. Po vynásobení obou stran číslem -1 dostaneme $c(a-c) + c(b-c) - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \leq ab$, což ale není nic jiného než $[\sqrt{c(a-c)} - \sqrt{c(b-c)}]^2 \leq ab$ a protože $ab \geq 0$, stačí odmocnit a získáme požadovanou nerovnost.