Cardanovy vzorce

Petr Šimeček

Abstrakt

Cardanovy vzorce jsou vzorce pro nalezení kořenů kubické rovnice. Kdo z vás je už viděl někde napsané, jistě by ho nenapadlo, že něco takového lze odvodit pomocí elementární středoškolské matematiky. A přece je to možné — vždyť tyto vzorce byly známé již kolem roku 1500.

Odstranění kvadratického členu, typy rovnic

Mějme rovnici

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0,$$

potom substitucí $y = x - \frac{a}{3}$ vyrušíme kvadratický člen.

Dostáváme tedy 3 typy rovnic (pro $a, b > 0$)[3]:

(1) $x^3 + ax = b$.
(2) $x^3 = ax + b$.
(3) $x^3 + b = ax$.

Nalezení řešení kubické rovnice

Vyjdeme tedy z rovnice

$$x^3 + px + q = 0.$$

Trik: Položíme $x := u + v$ a po úpravě dostáváme

$$u^3 + v^3 + (3uv + p) \cdot (u + v) + q = 0$$

a u, v zvolíme tak, že $uv = -\frac{p}{3}$. Dostáváme tedy, že $u^3 + v^3 = -q$ a zároveň $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$. Z toho plyne, že u^3, v^3 musí být řešení kvadratické rovnice $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$ a odtud

[3]Pomíjíme zde triviální případy, kdy je některý z dalších koeficientů nulový.

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}.$$
$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}.$$

Jeden reálný kořen tedy nalezneme:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Všechna (komplexní) řešení dostáváme ve tvaru $x_1 = u+v$, $x_2 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v$, $x_3 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v$, kde $\varepsilon = \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Je dobré si uvědomit, že tyto vzorce mohly být ve středověku jen sotva prakticky používané (viz příklad na přednášce).

Nalezení řešení rovnice 4. stupně

Stejnou metodou jako minule odstraníme kubický člen a dostaneme:

$$x^4 + ax^2 + bx + d = 0.$$

Trik: Uvažujme $\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = \left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 + t^2 + 2tx^2 + at = 2tx^2 - bx + (t^2 + at + \frac{a^2}{4} - c)$. Otázka zní: kdy je na pravé straně čtverec? Zjevně tehdy a jen tehdy, když platí $4 \cdot 2t(t^2 + at + \frac{a^2}{4} - c) - b^2 = 0$. To je kubická rovnice (tu už umíme řešit), nechť je tedy t_0 její řešení. Řešení naší rovnice potom splývají s řešení kvadratické rovnice

$$x^2 + \frac{a}{2} + t_0 = \pm\sqrt{2t_0}\left(x - \frac{b}{4t_0}\right).$$