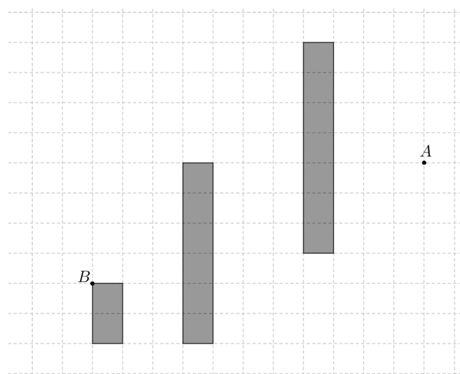
Úlohy třetí Íránské Geometrické Olympiády 2016 (Mladší)

1. Ali se chce přesunout z bodu A do bodu B. Nemůže zacházet dovnitř černých ploch, ale může se libovolně pohybovat po bílé ploše (po celé rovině, nejen po hranách mřížky). Pomozte Alimu najít nejkratší cestu mezi A a B. Pouze nakreslete cestu a napište, jak je dlouhá.



2. Nechť je ω kružnice opsaná trojúhelníku ABC, ve kterém je $|AC| > |AB|$. Nechť X je bod na AC a Y bod na kružnici ω tak, že platí $|CX| = |CY| = |AB|$. (Body A a Y leží na opačných stranách od přímky BC.) Přímka XY protíná ω podruhé v bodě P. Ukažte, že $PB = PC$.

3. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, jehož žádné dvě strany nejsou rovnoběžné. Každou dvojicí sousedních stran doplníme na rovnoběžník. Ukažte, že z těchto čtyř nově vzniklých bodů (tj. dokreslených vrcholů rovnoběžníků) leží právě jeden uvnitř $ABCD$.

4. V pravoúhlém trojúhelníku ABC (s pravým úhlem u A) protíná osa úsečky BC přímku AC v bodě K. Osa úsečky BK protíná přímku AB v bodě L. Pokud platí, že CL je osa vnitřního úhlu u C, jakých velikostí mohou nabývat úhly u B a u C?

5. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník s těmito vlastnostmi:
$|\angle ADC| = 135^\circ$ a $|\angle ADB| - |\angle ABD| = 2|\angle DAB| = 4|\angle CBD|$. Pokud $|BC| = \sqrt{2}|CD|$, dokažte, že $|AB| = |BC| + |AD|$.

Čas: 3 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat až 8 bodů

Úlohy třetí Íránské Geometrické Olympiády 2016 (Střední)

1. V lichoběžníku $ABCD$, ve kterém $AB \parallel CD$, označíme kružnice nad průměry AD a BC postupně jako ω_1 a ω_2. Nechť X a Y jsou libovolné dva body postupně na ω_1 a ω_2. Ukažte, že délka úsečky XY je maximálně polovina obvodu $ABCD$.

2. Dvě kružnice C_1 a C_2 se protínají v bodech A a B. Tečna k C_1 v bodě A protíná C_2 podruhé v P a přímka PB protíná C_1 podruhé v Q (bod Q leží vně kružnice C_2). Tečna k C_2 z Q protíná C_1 a C_2 postupně v bodech C a D (body A a D leží na opačných stranách od přímky PQ). Ukažte, že AD je osou úhlu CAP.

3. Najděte všechna kladná celá čísla N, pro která existuje trojúhelník, který je možno rozdělit na N podobných čtyřúhelníků.

4. Nechť ω je kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku ABC (s pravým úhlem u A). Tečna k ω z bodu A protíná přímku BC v bodě P. Nechť M je střed (kratšího) oblouku AB a PM protíná ω podruhé v Q. Tečna k ω v bodě Q protíná AC v K. Dokažte, že $|\angle PKC| = 90°$.

5. Kružnice ω a ω' se protínají v bodech A a B. Tečna ke kružnici ω v A protíná ω' v C a tečna ke kružnici ω' v A protíná ω v D. Osa vnitřního úhlu $\angle CAD$ protíná ω a ω' postupně v E a F a osa vnějšího úhlu $\angle CAD$ protíná ω a ω' postupně v X a Y. Dokažte, že se osa úsečky XY dotýká kružnice opsané trojúhelníku BEF.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat až 8 bodů

Úlohy třetí Íránské Geometrické Olympiády 2016 (Starší)

1. Kružnice ω a ω' se protínají v bodech A a B. Tečna ke kružnici ω v bodě A protíná ω' v C a tečna ke kružnici ω' v bodě A protíná ω v D. Přímka CD protíná ω a ω' postupně v E a F (předpokládejte, že E leží mezi F a C). Kolmice na AC z bodu E protíná ω' v bodě P a kolmice na AD z bodu F protíná ω v bodě Q (body A, P a Q všechny leží na stejné straně od přímky CD). Dokažte, že body A, P a Q leží na jedné přímce.

2. V ostroúhlém trojúhelníku ABC si označíme jako D patu kolmice z A na BC a jako M střed úsečky AC. Nechť X je takový bod, že $|\angle AXB| = |\angle DXM| = 90°$ (předpokládejte, že X a C leží na opačných stranách od přímky BM). Ukažte, že $|\angle XMB| = 2|\angle MBC|$.

3. Prodloužení stran AD a BC konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě P. Body I_1 a I_2 jsou postupně středy kružnic vepsaných trojúhelníkům PAB a PDC. Bod O je střed kružnice opsané trojúhelníku PAB a H je ortocentrum trojúhelníku PDC. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AI_1B a DHC se dotýkají právě tehdy, když se dotýkají kružnice opsané trojúhelníkům AOB a DI_2C.

4. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Přímky AB a CD se protínají v bodě E a přímky AD a BC se protínají v bodě F. Bod P je průsečík úhlopříček AC a BD. Označme si jako ω_1 kružnici procházející skrz D, která se dotýká AC v bodě P. Dále si označme jako ω_2 kružnici procházející skrz C, která se dotýká BD v bodě P. Nechť je X průsečík ω_1 a AD, a Y průsečík ω_2 a BC. Kružnice ω_1 a ω_2 se podruhé protínají v bodě Q. Dokažte, že kolmice z bodu P na přímku EF prochází skrz střed kružnice opsané trojúhelníku XQY.

5. Existuje v rovině šestice bodů $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ taková, že všechny trojúhelníky $X_iY_jZ_k$ jsou podobné pro $1 \leq i, j, k \leq 2$?

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat až 8 bodů